

## Agujeros de Gusano en un *Background* Cosmológico

Carlos A. Marín\*

Universidad San Francisco de Quito, Colegio de Ciencias e Ingeniería –El Politécnico–  
Diego de Robles y Vía Interoceánica, Quito, Ecuador.

\*Autor principal/Corresponding author, e-mail: cmarin@usfq.edu.ec

Editado por/Edited by: Cesar Costa, PhD.

Recibido/Received: 11/22/2012. Aceptado/Accepted: 12/02/2012.

Publicado en línea/Published on Web: 12/28/2012. Impreso/Printed: 12/28/2012

### Abstract

Using Einstein's field equations, the energy-momentum tensor components are deduced for a Morris-Thorne wormhole in a cosmological background. The embedding surfaces for these wormholes are studied and also the red shift parameter is calculated in terms of the conformal factor  $\Omega$ . The exoticity condition is analyzed and an analytic solution for the form factor of such wormholes is introduced. Finally, we study the weak energy conditions (WEC) and deduce an equation for the acceleration parameter of the universe in terms of the conformal factor.

**Keywords.** Wormholes, conformal factor, general relativity, hyperspace, Einstein, acceleration parameter.

### Resumen

Usando las ecuaciones de campo de Einstein se deducen las expresiones de las componentes del tensor energía-momento para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne inmerso en un background cosmológico. Las superficies de inserción (embedding surfaces) para dichos agujeros son analizadas y se calcula la expresión del parámetro de corrimiento hacia el rojo en términos del factor conforme  $\Omega$ . Se analiza la condición de exotocidad y se introduce una solución analítica para la función de forma de un agujero de gusano de las características señaladas inmerso en un background cosmológico. Finalmente se analizan las condiciones de energía débil y se deduce una expresión para el parámetro de aceleración del universo en términos de dicho factor conforme.

**Palabras Clave.** Agujeros de gusano, factor conforme, relatividad general, hiperespacio, Einstein, parámetro de aceleración.

### Introducción

Un agujero de gusano (wormhole) es un túnel en el hiperespacio que conecta dos puntos en dos regiones asintóticamente planas en el espacio-tiempo [1, 2] (el hiperespacio es un espacio plano hipotético con más de tres dimensiones espaciales, en el que está contenido el espacio curvo de nuestro universo). Es una especie de "asa" en la topología del espacio-tiempo. Los agujeros de gusano eventualmente podrían conectar universos paralelos.

El wormhole tiene dos entradas llamadas "bocas". Las bocas están conectadas por un túnel a través del hiperespacio que puede ser muy corto (digamos unos pocos kilómetros de largo). Las bocas de un agujero de gusano "se parecen" al horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild [2, 3, 4, 5, 6], con una diferencia

importante: el horizonte de sucesos de un agujero negro es, si despreciamos los efectos cuánticos, una superficie de una sola vía; cualquier cosa puede entrar en el agujero, sin embargo nada puede escapar. Por el contrario, las bocas de un wormhole son superficies que pueden ser cruzadas en ambas direcciones, hacia adentro del agujero de gusano y de regreso hacia el "universo externo" (nuestro universo). De acuerdo con las ecuaciones de campo de Einstein, el tiempo de vida de un wormhole es en promedio muy pequeño, por lo que nada en absoluto (persona, radiaciones, señal de cualquier clase) puede viajar a través del túnel del agujero de gusano. La única manera de mantener abierto el agujero por un tiempo mucho mayor es mediante la presencia de algún tipo de material "exótico", a lo largo del wormhole, que empuje sus paredes gravitacionalmente, manteniéndolas separadas. Para ello, se necesita una región del espacio-tiempo con curvatura negativa, similar a la superficie de una silla

ISSN 1390-5384



de montar. Al material se le denomina “exótico”, porque como Kip Thorne demostrara en 1985, debe tener una densidad de energía promedio negativa, con respecto a un haz de luz viajando a través del agujero de gusano. El material “exótico” repele gravitacionalmente los rayos de luz por lo que los haces luminosos se desenfocan, como se ilustra en la figura a continuación.

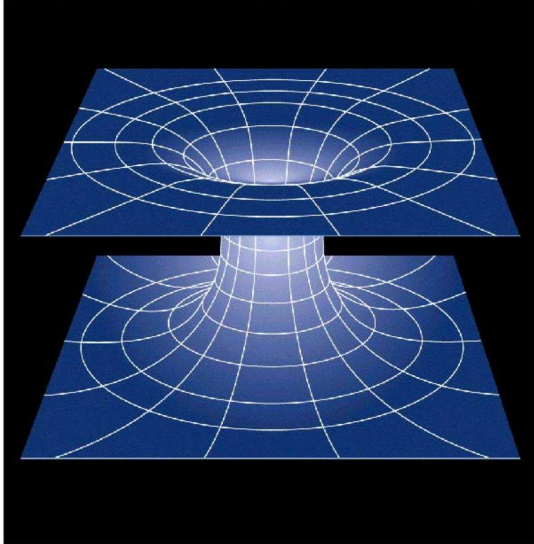


Figura 1: Wormhole

El que la densidad de energía promedio sea negativa no implica que el material exótico tenga una energía negativa con respecto a un observador en reposo en el interior del agujero de gusano. El concepto de densidad de energía es relativo al sistema de referencia utilizado; en un sistema de referencia, la densidad puede ser positiva, y en otro, negativa.

Nadie sabe exactamente de qué puede estar hecho el material exótico. Robert Wald [1] ha probado recientemente, que en un espacio-tiempo curvo, bajo una amplia variedad de circunstancias, la curvatura distorsiona las fluctuaciones del vacío de carácter gravitacional convirtiéndolas en exóticas debido a que su densidad de energía promedio se hace negativa. Dichas fluctuaciones del vacío son análogas a las fluctuaciones del vacío de naturaleza electromagnética. Son fluctuaciones aleatorias en la curvatura del espacio causadas porque regiones del mismo están continuamente tomando energía de regiones adyacentes, para luego devolverla. Bajo circunstancias ordinarias las fluctuaciones son tan pequeñas que ningún científico las ha podido detectar hasta ahora. Otra posibilidad es que el material exótico esté formado por energía oscura que, como sabemos, tiene densidad de energía negativa y es el 74 % de la energía del universo. Algunos detalles sobre las características del material exótico se describen en las referencias [1, 7].

En el presente documento continuamos con el análisis iniciado en los artículos “Agujeros de gusano: solución exponencial” [8] y “Agujeros de gusano y potenciales efectivos” [9]. En primer lugar, partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein, calcularemos las componentes del tensor energía-momento para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne inmerso en un background cosmológico. Luego estudiaremos las superficies de inserción (embedding surfaces) para dichos agujeros y calcularemos la expresión del parámetro de corrimiento hacia el rojo en términos del factor conforme  $\Omega$ . Analizaremos la condición de exotividad y hallaremos una solución analítica para la función de forma de un agujero de gusano de las características señaladas en un background cosmológico. Finalmente analizaremos las condiciones de energía débil y calcularemos el parámetro de aceleración del universo en términos de dicho factor conforme.

## 1 Métricas

Consideremos la métrica:

$$(ds)^2 = e^{2\Phi} c^2 (dt)^2 - f^*(r) (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2 \quad (1)$$

donde  $s$  representa el elemento de arco,  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas esféricas de un punto y  $t$  es el tiempo coordenado medido por un observador remoto en reposo.

$$(d\Omega^*)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \text{ y } f^*(r) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}.$$

A  $b(r)$  se le denomina función de forma del agujero de gusano, y determina la forma espacial del mismo. La función  $\Phi = \Phi(r)$  se denomina función de corrimiento hacia el rojo.

La geometría determinada por dicha métrica, ha sido estudiada en detalle en las referencias [7, 8]. En el caso de un agujero de gusano inmerso en un background cosmológico, la mencionada métrica se puede generalizar a:

$$(ds)^2 = \Omega^2(t) \left[ e^{2\Phi} c^2 (dt)^2 - f(r) (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2 \right] \quad (2)$$

donde  $\Omega(t)$  es el factor conforme, el cual es finito y definido positivo a través del dominio de  $t$  [10].

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} \quad (3)$$

en la última expresión  $k$  es un parámetro independiente del tiempo que especifica la curvatura del universo y que puede ser  $k = +1$  para un universo cerrado (curvado en forma parecida a la superficie de una esfera),  $k = 0$  para un universo plano o  $k = -1$  en un universo abierto (curvado en sentido contrario como la superficie de una silla de montar)[3]. Cuando  $\Phi(r) \rightarrow 0$  y  $b(r) \rightarrow 0$ ,

$$(ds)^2 = \Omega^2(t) \left[ c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - kr^2} (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2 \right] \quad (4)$$

que es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW metric) [11]. Cuando  $\Omega(t) \rightarrow constante = 1$  y  $k \rightarrow 0$ , la métrica (2) se aproxima a la métrica estática de un agujero de gusano de Morris-Thorne (ecuación (1)).

### 2 Símbolos de Christoffel y Tensor de Riemann-Christoffel

Para la métrica (2), el cuadrado del elemento de arco  $(ds)^2$  se puede escribir:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5}$$

donde

$$(g_{\mu\nu}) = \Omega^2(t) \begin{pmatrix} e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

El tensor contravariante correspondiente es:

$$(g^{\mu\nu}) = \Omega^{-2}(t) \times \begin{pmatrix} e^{-2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(f(r))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \end{pmatrix}$$

por otro lado,

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\Omega^8 r^4 \sin^2 \theta f(r) e^{2\Phi(r)} \tag{6}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie son:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right\} \tag{7}$$

donde  $x^\mu$  es el cuadvivector posición de la partícula. Las letras griegas como:  $\mu, \sigma, \rho$ , etc. toman los valores 0, 1, 2 y 3. Hemos adoptado la convención de suma de Einstein en la que se suma sobre índices que se repiten dos veces.

En coordenadas esféricas  $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta$  y  $x^3 = \varphi$ .

Dichos símbolos se pueden calcular facilmente usando el teorema:

Si  $g_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$  (métrica diagonal)

- a)  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0 \forall \mu \neq \nu \neq \rho$ ,
- b)  $\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\mu}$  para  $\mu$  fijo,
- c)  $\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\nu}$  para  $\mu \neq \nu$  fijos,
- d)  $\Gamma_{\nu\nu}^\mu = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\mu}$  para  $\mu \neq \nu$  fijos,

El resultado es que los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \tag{8}$$

donde  $\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2 \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} \times \left[ 2kr + \left( \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right] \tag{9}$$

donde  $b'(r) = \frac{db}{dr}$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \Phi'(r) \tag{10}$$

donde  $\Phi'(r) = \frac{d\Phi}{dr}$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \tag{11}$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \tag{12}$$

$$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \tag{13}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \tag{14}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \tag{15}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \tag{16}$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-2\Phi(r)} \frac{1}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} \tag{17}$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) r^2 e^{-2\Phi(r)} \tag{18}$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) r^2 e^{-2\Phi(r)} \sin^2 \theta \tag{19}$$

$$\Gamma_{00}^1 = e^{2\Phi} \Phi'(r) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \tag{20}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \tag{21}$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \tag{22}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin(2\theta)}{2} \tag{23}$$

El tensor de Riemann-Christoffel está dado por la expresión:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma_{\nu\rho}^\mu) + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \tag{24}$$

Si el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  es diagonal,  $R_{\mu\rho\sigma}^\mu = 0$  para  $\mu$  fijo y  $R_{\nu\rho\rho}^\mu = 0$  para  $\rho$  fijo.

Las componentes del tensor de Riemann-Christoffel diferentes de cero son:

$$R_{101}^0 = -R_{110}^0 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \times \frac{1}{\left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} - \Phi''(r) - (\Phi'(r))^2 + \frac{\Phi'(r) \left[ 2kr + \left( \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right]}{2 \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} \tag{25}$$

$$R_{202}^0 = -R_{220}^0 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} r^2 - r \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \Phi'(r) \quad (26)$$

$$R_{303}^0 = -R_{330}^0 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \times r^2 \sin^2\theta - r \sin^2\theta \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \Phi'(r) \quad (27)$$

$$R_{001}^1 = -R_{010}^1 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) - e^{2\Phi} \times \left[ (\Phi'' + (\Phi')^2) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) - \frac{1}{2} \Phi' \left( 2kr + \frac{(b'r - b)}{r^2} \right) \right] \quad (28)$$

$$R_{020}^2 = -R_{002}^2 = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) + \frac{1}{r} e^{2\Phi} \Phi' \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (29)$$

$$R_{030}^3 = -R_{003}^3 = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) + \frac{1}{r} e^{2\Phi} \Phi' \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (30)$$

$$R_{212}^0 = -R_{221}^0 = -\frac{r^2}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-2\Phi} \Phi' \quad (31)$$

$$R_{012}^2 = -R_{021}^2 = -\frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' \quad (32)$$

$$R_{313}^0 = -R_{331}^0 = -\frac{r^2}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-2\Phi} \Phi' \sin^2\theta \quad (33)$$

$$R_{013}^3 = -R_{031}^3 = -\frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' \quad (34)$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = kr^2 + \frac{1}{2} b' - \frac{b}{2r} + \frac{r^2}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} \quad (35)$$

$$R_{112}^2 = -R_{121}^2 = R_{113}^3 = -R_{131}^3 = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \frac{e^{-2\Phi}}{\left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} - \frac{\left( 2kr + \frac{(b'r - b)}{r^2} \right)}{2r \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} \quad (36)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} r^2 \sin^2\theta + \sin^2\theta \left( kr^2 + \frac{b'}{2} - \frac{b}{2r} \right) \quad (37)$$

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} r^2 \sin^2\theta + \sin^2\theta \left( kr^2 + \frac{b}{r} \right) \quad (38)$$

$$R_{232}^3 = -R_{223}^3 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} r^2 + kr^2 + \frac{b}{r} \quad (39)$$

$$R_{202}^1 = -R_{220}^1 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' r^2 \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) \quad (40)$$

$$R_{102}^2 = -R_{120}^2 = -\frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' \quad (41)$$

$$R_{303}^1 = -R_{330}^1 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' r^2 \sin^2\theta \times \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) \quad (42)$$

$$R_{130}^3 = -R_{103}^3 = \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \Phi' \quad (43)$$

### 3 Marco de referencia propio

Consideremos dos sistemas de referencia, al uno lo llamaremos sistema de referencia no primado y al otro sistema primado. Sea  $\{\vec{e}_\alpha\}$  con  $\alpha = 0, 1, 2$  y  $3$  la base de vectores asociada al sistema de referencia no primado, y  $\{\vec{e}'_\alpha\}$  la base de vectores asociada al sistema primado ( $\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\alpha$ , son vectores en el espacio-tiempo, es

decir, tienen cuatro componentes). Un vector  $\vec{A}$  en el espacio tiempo se puede escribir:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A^\alpha \vec{e}_\alpha \text{ en la base } \{\vec{e}_\alpha\}, \\ \vec{A} &= A'^\mu \vec{e}'_\mu \text{ en la base } \{\vec{e}'_\mu\}\end{aligned}$$

de manera que  $A^\alpha \vec{e}_\alpha = A'^\mu \vec{e}'_\mu$ . Si  $A'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha$ , entonces podemos escribir:

$$A^\alpha (\Lambda^\mu_\alpha \vec{e}'_\mu - \vec{e}_\alpha) = \vec{0}$$

ya que  $A^\alpha$  representan las componentes de un vector arbitrario, tenemos:

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^\mu_\alpha \vec{e}'_\mu \quad (44)$$

y también, si  $\Lambda$  es una matriz invertible:

$$\vec{e}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \vec{e}_\alpha \quad (45)$$

Sea  $\{\vec{e}_\alpha\}$  la base ortogonal de vectores asociada con las coordenadas  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \varphi$ . Introduzcamos una base ortonormal de vectores  $\{\vec{e}'_\mu\}$  definidos por:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_0 \\ \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

donde

$$\Lambda = \Omega \begin{pmatrix} e^\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (f(r))^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned}g'_{\alpha\beta} &\equiv \vec{e}'_\alpha \cdot \vec{e}'_\beta = \eta_{\alpha\beta} = \\ &\text{diagonal}(1, -1, -1, -1) \quad (47)\end{aligned}$$

Esta base nos permite introducir un nuevo sistema de coordenadas del marco de referencia propio "proper reference frame":

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (48)$$

o:

$$x'^0 = \Omega e^\Phi x^0 \quad (48a)$$

$$x'^1 = \Omega \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} x^1 \quad (48b)$$

$$x'^2 = \Omega r x^2 \quad (48c)$$

$$x'^3 = \Omega r \sin \theta x^3 \quad (48d)$$

Estas son las coordenadas de un conjunto de observadores que siempre permanecen en reposo en el campo gravitacional del agujero de gusano. Es decir que tienen:

$$r, \theta \text{ y } \varphi \text{ constantes}$$

En esta nueva base, las componentes del tensor de Riemann-Christoffel se pueden calcular a partir de la relación:

$$R'^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^{\alpha_3}}{\partial x'^\sigma} \times \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\beta} R_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^\beta \quad (49)$$

El resultado es que las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned}R'^0_{101} &= -R'^0_{110} = R'^1_{001} = -R'^1_{010} = \\ &\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \\ &- \left( \Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 \right) \Omega^{-2} \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \\ &+ \frac{1}{2\Omega^2} \Phi'(r) \left( 2kr + \left( \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right) \quad (50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R'^0_{202} &= -R'^0_{220} = R'^0_{303} = -R'^0_{330} = \\ &\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \\ &- \frac{1}{r\Omega^2} \Phi'(r) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R'^2_{020} &= -R'^2_{002} = R'^3_{030} = -R'^3_{003} = \\ &- \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \\ &+ \frac{1}{r\Omega^2} \Phi'(r) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (52)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R'^0_{212} &= -R'^0_{221} = R'^2_{012} = -R'^2_{021} = \\ &- \frac{1}{\Omega^2 c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \Phi'(r) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (53)\end{aligned}$$

$$R'_{313} = -R'^0_{331} = R'^3_{013} = -R'^3_{031} = -\frac{1}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) e^{-\Phi} \Phi'(r) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

$$R'_{212} = -R'^1_{221} = R'^1_{313} = -R'^1_{331} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 e^{-2\Phi} + \frac{1}{r^2 \Omega^2} \left(kr^2 + \frac{1}{2}b' - \frac{b(r)}{2r}\right) \quad (55)$$

$$R'_{112} = -R'^2_{121} = R'^3_{113} = -R'^3_{131} = -\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 e^{-2\Phi} - \frac{1}{2\Omega^2 r} \left(2kr + \left(\frac{rb'(r) - b(r)}{r^2}\right)\right) \quad (56)$$

$$R'_{323} = -R'^2_{332} = R'^3_{232} = -R'^3_{223} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 e^{-2\Phi} + \frac{1}{\Omega^2} \left(k + \frac{b}{r^3}\right) \quad (57)$$

$$R'_{202} = -R'^1_{220} = R'^1_{303} = -R'^1_{330} = \frac{1}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) e^{-\Phi} \Phi'(r) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (58)$$

$$R'_{102} = -R'^2_{120} = R'^3_{103} = -R'^3_{130} = -\frac{1}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) e^{-\Phi} \Phi'(r) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

#### 4 Tensor y escalar de Ricci

El tensor de Ricci se define por la expresión

$$R'_{\mu\nu} \equiv R'^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (60)$$

Las componentes no nulas de dicho tensor son:

$$R'_{00} = -\frac{3}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2\right) e^{-2\Phi} + \frac{(\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2)}{\Omega^2} \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{\Phi'(r)}{\Omega^2} \left(-3kr - \frac{b'}{2r} - \frac{3b}{2r^2} + \frac{2}{r}\right) \quad (61)$$

$$R'_{11} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2\right) e^{-2\Phi} - \frac{(\Phi'' + (\Phi')^2)}{\Omega^2} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right) + \frac{(\Phi' + \frac{2}{r})}{2\Omega^2} \left(2kr + \frac{(rb' - b)}{r^2}\right) \quad (62)$$

$$R'_{22} = R'_{33} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2\right) e^{-2\Phi} - \frac{1}{r\Omega^2} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right) \Phi' + \frac{1}{\Omega^2} \left(2k + \frac{b'}{2r^2} + \frac{b}{2r^3}\right) \quad (63)$$

$$R'_{01} = R'_{10} = \frac{2}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right) e^{-\Phi} \times \Phi'(r) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (64)$$

El escalar de Ricci es:

$$R' = g'^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = R'_{00} - R'_{11} - R'_{22} - R'_{33} \quad (65)$$

Introduciendo las ecuaciones (61)-(63) en (65) tenemos:

$$R' = -\frac{6}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}\right) e^{-2\Phi} + \frac{2}{\Omega^2} (\Phi'' + (\Phi')^2) \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right) + \frac{\Phi'}{\Omega^2} \left(-6kr - \frac{b'}{r} - \frac{3b}{r^2} + \frac{4}{r}\right) + \frac{1}{\Omega^2} \left(-6k - \frac{2b'}{r^2}\right) \quad (66)$$

#### 5 Tensor de Einstein

Las componentes no nulas del tensor de Einstein [3, 4, 5, 6]

$$G'_{\mu\nu} = R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R' g'_{\mu\nu}$$

son:

$$G'_{00} = \frac{3}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)^2 e^{-2\Phi} + \frac{1}{\Omega^2} \left(3k + \frac{b'}{r^2}\right) \quad (67)$$

$$G'_{11} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) e^{-2\Phi} + \frac{2\Phi'}{\Omega^2} \left( -kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{\Omega^2} \left( -k - \frac{b}{r^3} \right) \quad (68)$$

$$G'_{01} = G'_{10} = \frac{2}{\Omega^2 c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \times \Phi'(r) \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (69)$$

$$G'_{22} = G'_{33} = \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) e^{-2\Phi} + \frac{(\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2)}{\Omega^2} \left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) + \frac{\Phi'(r)}{\Omega^2} \left( -2kr - \frac{b}{2r^2} - \frac{b'}{2r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{\Omega^2} \left( -k + \frac{b}{2r^3} - \frac{b'}{2r^2} \right) \quad (70)$$

## 6 Ecuaciones de Campo de Einstein y tensor energía-momentum

Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden escribir: [3, 4, 5, 6]

$$G'_{\mu\nu} - \lambda g'_{\mu\nu} = k^* T'_{\mu\nu} \quad (71)$$

donde  $k^* = \frac{8\pi G}{c^4}$  y  $\lambda$  es la constante cosmológica introducida por Einstein en el año 1917. La constante cosmológica es una medida de la contribución a la densidad de energía del universo debido a fluctuaciones del vacío. Originalmente, Einstein la introdujo para evitar la expansión del universo, ya que él creía en un universo estático. Su valor es  $|\lambda| < 3 \times 10^{-52} \text{metros}^{-2}$ .

El inverso de la raíz cuadrada del valor absoluto de la constante cosmológica  $\left( \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right)$  mide la escala de distancia en la cual la geometría del espacio-tiempo es afectada por fluctuaciones del vacío; su valor coincide con el tamaño del universo visible:  $10^{26}$  metros [6].

El tensor de energía-momentum  $T'_{\mu\nu}$  debe tener la misma estructura algebraica que la diferencia entre el tensor de Einstein  $G'_{\mu\nu}$  y el producto de la constante cosmológica por el tensor métrico  $\lambda g'_{\mu\nu}$ . De manera que las únicas componentes no nulas de  $T'_{\mu\nu}$  son  $T'_{00}$ ,  $T'_{01} = T'_{10}$ ,  $T'_{11}$  y  $T'_{22} = T'_{33}$ , donde:

$$T'_{00} = \rho(r, t) c^2 \quad (72)$$

$$T'_{01} = T'_{10} = -h(r, t) \quad (73)$$

$$T'_{11} = -\tau(r, t) \quad (74)$$

$$T'_{22} = T'_{33} = P(r, t) \quad (75)$$

Donde  $\rho(r, t)$  es la densidad total de masa-energía (en  $\frac{kg}{m^3}$ ) medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano,  $h(r, t)$  es el flujo de energía en la dirección radial hacia afuera,  $\tau(r, t)$  es la tensión por unidad de área medida por dichos observadores en la dirección radial, y  $P(r, t)$  es la presión medida en las direcciones laterales (ortogonales a la dirección radial). En un fluido perfecto  $P(r, t) = -\tau(r, t)$ .

A partir de (71) podemos escribir:

$$G'_{00} - \lambda = k^* T'_{00}$$

usando las ecuaciones (67) y (72), podemos demostrar que:

$$\rho(r, t) c^2 = \frac{3}{k^* \Omega^2 c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} + \frac{1}{k^* \Omega^2} \left( 3k + \frac{b'}{r^2} \right) - \frac{\lambda}{k^*} \quad (76)$$

La ecuación (71) para  $\mu = \nu = 1$  da:

$$\tau(r, t) = -\frac{1}{k^* \Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) e^{-2\Phi} - 2 \frac{\Phi'(r)}{k^* \Omega^2} \left( -kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{k^*} \left[ \frac{1}{\Omega^2} \left( -k - \frac{b}{r^3} \right) + \lambda \right] \quad (77)$$

La ecuación (71) para  $\mu = \nu = 2$  da:

$$P(r, t) = \frac{1}{k^* \Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) e^{-2\Phi} + \frac{1}{k^* \Omega^2} (\Phi'' + (\Phi')^2) \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) + \frac{\Phi'}{k^* \Omega^2} \left( -2kr - \frac{b}{2r^2} - \frac{b'}{2r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{k^*} \left[ \frac{1}{\Omega^2} \left( -k + \frac{b}{2r^3} - \frac{b'}{2r^2} \right) + \lambda \right] \quad (78)$$

Para  $\mu = 0, \nu = 1$  la ecuación (71) implica que

$$G'_{01} = -k^* h(r, t)$$

de donde tenemos:

$$h(r, t) = -\frac{2}{k^* \Omega^2 c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \Phi' \times \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (79)$$

### 7 Superficies de inserción (embedding surfaces)

Para un tiempo fijo  $t$  y tomando  $\theta = \pi/2$  (plano ecuatorial) además de  $\Omega = 1$ , la parte espacial de la métrica (2) se puede escribir:

$$(ds')^2 = -(ds)^2 = f(r) (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (80)$$

que representa un elemento de arco en el plano ecuatorial. Deseamos construir en el espacio Euclideo tridimensional, una superficie bidimensional que tenga la misma geometría que la del elemento de arco descrito por (80). Entonces, uno podría encajar la geometría del espacio curvo bidimensional en la geometría plana de un espacio Euclideo tridimensional [12]. En dicho espacio Euclideo, introduciremos coordenadas cilíndricas  $z, r$  y  $\varphi$ . La métrica Euclidea del espacio de inserción (embedding space) es:

$$(ds_{Euclidean})^2 = \left( 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right) (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (81)$$

En (81), nosotros suponemos que  $z = z(r)$  (consideramos que la superficie insertada tiene simetría axial).

Si nosotros identificamos las coordenadas  $(r, \varphi)$  del espacio Euclideo con las coordenadas  $(r, \varphi)$  del espacio-tiempo del agujero de gusano, el elemento de arco (81) será el mismo que el descrito por la ecuación (80) a través del wormhole. Podemos entonces escribir:

$$f(r) = \frac{1}{\left( 1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)} = 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \quad (82)$$

de donde obtenemos:

$$\left( \frac{dz}{dr} \right) = \pm \left( \frac{kr^2 + \frac{b(r)}{r}}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (83)$$

La ecuación (83) describe la forma en la que la función  $b(r)$  modela la geometría espacial del agujero de gusano.

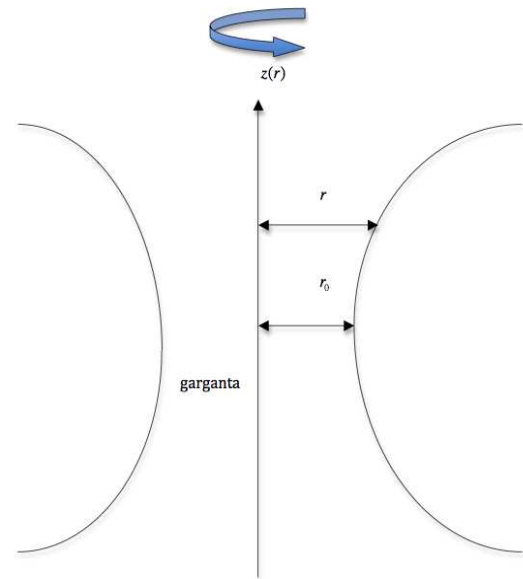


Figura 2: Diagrama de inserción para un agujero de gusano. En la garganta se cumple  $r = r_0$ . Para generar el agujero de gusano, se debe rotar la curva de la figura alrededor del eje  $z$ .

Si  $1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} = 0$  para algún  $r = r_0$ , entonces

$$\left( \frac{dz}{dr} \right) \Big|_{r=r_0} = \pm \infty \quad (84)$$

Todo agujero de gusano tiene un radio mínimo  $r = r_0$  para el cual la superficie insertada del espacio curvo bidimensional es vertical. Dicho radio define la garganta del agujero de gusano. Si  $k = 0, b(r_0) = r_0 = b_0$  [8].

### 8 Parámetro de corrimiento hacia el rojo

Consideremos una fuente en el agujero de gusano que emite pulsos de luz de energía  $E'$ . Para un observador distante (muy alejado del campo gravitacional del agujero), la energía que recibe de los pulsos de luz ( $E$ ) será:

$$E = (g_{00})^{1/2} E' \quad (85)$$

donde  $E = hc/\lambda_{recibida}$  y  $E' = hc/\lambda_{emitida}$  ( $\lambda_{emitida}$  y  $\lambda_{recibida}$  son las longitudes de onda de las señales emitida y recibida, respectivamente).

El parámetro de corrimiento hacia el rojo se define a través de la relación:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{recibida} - \lambda_{emitida}}{\lambda_{emitida}} = \frac{\lambda_{recibida}}{\lambda_{emitida}} - 1 \quad (86)$$

Usando la ecuación (85), tenemos:

$$z = \Omega^{-1} e^{-\Phi} - 1 \quad (87)$$

Por esta razón, la función  $\Phi(r)$  se denomina función de corrimiento hacia el rojo gravitacional.



## 9 Condición de exotividad

La función de exotividad  $\varsigma$  puede ser escrita como [8]:

$$\varsigma \equiv -\frac{T'_{\mu\nu}k'^{\mu}k'^{\nu}}{|T'_{00}|} \quad (88)$$

donde  $k'^{\mu} = (1, \pm 1, 0, 0)$  representa un vector nulo radial (null vector) saliente o entrante, respectivamente.

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu}k'^{\mu}k'^{\nu} &= T'_{00} \pm 2T'_{01} + T'_{11} \\ &= \frac{1}{k^*} [G'_{00} \pm 2G'_{01} + G'_{11}] \quad (89) \end{aligned}$$

$T'_{00}$  está dado por las ecuaciones (72) y (76). Reemplazando estas expresiones en (88) obtenemos:

$$\begin{aligned} \varsigma &= -\left( \frac{1}{\left| \frac{3e^{-2\Phi}}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + 3k + \frac{b'}{r^2} - \lambda\Omega^2 \right|} \right) \\ &\times \left( \frac{1}{c^2} e^{-2\Phi} \left[ 4 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right] \right. \\ &+ \Phi' \left[ \pm \frac{4}{c} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( -kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) \right] \\ &\quad \left. + \left( 2k + \frac{b'}{r^2} - \frac{b}{r^3} \right) \right) \quad (90) \end{aligned}$$

Para  $\Omega = 1, \lambda = 0$ , esta ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} \varsigma &= -\left[ \frac{1}{\left| 3k + \frac{b'}{r^2} \right|} \right] \\ &\times \left( 2\Phi' \left( -kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 2k + \frac{b'}{r^2} - \frac{b}{r^3} \right) \right) \quad (91) \end{aligned}$$

Finalmente, si  $k = 0$  obtenemos:

$$\varsigma = \left( \frac{1}{|b'|} \right) \left[ \frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' - b' \right] \quad (92)$$

que es la expresión que aparece en la referencia [8] (ecuación (139)).

## 10 Traza del tensor energía-cantidad de movimiento

La traza del tensor energía cantidad de movimiento es

$$\begin{aligned} T' &= T'^{\mu}_{\mu} = g'^{\mu\nu}T'_{\mu\nu} \\ &= T'_{00} - T'_{11} - T'_{22} - T'_{33} \quad (93) \end{aligned}$$

que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{2}{k^*\Omega^2} \left( \frac{3e^{-2\Phi}}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi' \left( -3kr - \frac{3b}{2r^2} - \frac{b'}{2r} + \frac{2}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \Phi'' + (\Phi')^2 \right) \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 3k + \frac{b'}{r^2} \right) \right) - \frac{4\lambda}{k^*} \quad (94) \end{aligned}$$

## 11 Solución analítica para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne que evoluciona en un background cosmológico

Asumiendo que la traza del tensor energía-cantidad de movimiento es una función en variables separables de  $t$  y  $r$  y tomando  $\lambda = 0$

$$T' = \frac{S^*(t)}{\Omega^2(t)} e^{-2\Phi} \quad (95)$$

( $x := y \Rightarrow x = y$  en  $I^+$ ;  $\hat{M} = MUI^+$ .  $I^+$  es la frontera del espacio tiempo extendido  $\hat{M}$  y representa puntos en el infinito sobre el cono de luz futuro nulo (null cone)) [10].

de manera que:

$$\frac{G}{k^*c^2} \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) - S^*(t) = c \quad (96)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{2}{k^*} e^{2\Phi} \left( \Phi' \left( -3kr - \frac{3b}{2r^2} - \frac{b'}{2r} + \frac{2}{r} \right) \right. \\ \left. + \left( \Phi'' + (\Phi')^2 \right) \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) \right. \\ \left. - \left( 3k + \frac{b'}{r^2} \right) \right) = c^* \quad (97) \end{aligned}$$

donde  $c^*$  es una constante (un tratamiento similar se puede encontrar en la referencia [13]). Si tomamos  $\Phi = -\frac{\alpha}{r}$  (elección que garantiza que la función de corrimiento hacia el rojo sea finita en cualquier lugar, y consecuentemente no exista horizonte de eventos) donde  $\alpha$  es una constante, entonces

$$z = \Omega^{-1} e^{-\Phi} - 1 = \Omega^{-1} e^{\frac{\alpha}{r}} - 1. \quad (98)$$

Sustituyendo la expresión de  $\Phi$  en (97) con  $c^* = 0$ , obtenemos la ecuación diferencial de primer orden no homogénea

$$\begin{aligned} b' \left( \frac{\alpha}{2r^3} + \frac{1}{r^2} \right) + b \left( -\frac{\alpha}{2r^4} + \frac{\alpha^2}{r^5} \right) \\ + \frac{\alpha k}{r} - \frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{\alpha^2 k}{r^2} + 3k = 0 \quad (99) \end{aligned}$$

La solución de la ecuación homogénea

$$b' \left( \frac{\alpha}{2r^3} + \frac{1}{r^2} \right) + b \left( -\frac{\alpha}{2r^4} + \frac{\alpha^2}{r^5} \right) = 0 \quad (100)$$

es:

$$b_1(r) = \left( \frac{r}{\alpha + 2r} \right)^5 C_1^* e^{\frac{2\alpha}{r}} \quad (101)$$

donde  $C_1^*$  es una constante. Si buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma  $U_1(r)b_1(r)$  obtenemos:

$$U_1(r) = \frac{2}{C_1^*} \int dr e^{-\frac{2\alpha}{r}} (\alpha + 2r)^4 \times \frac{(-\alpha kr^3 + \alpha^2 - \alpha^2 kr^2 - 3kr^4)}{r^6} \quad (102)$$

de manera que la solución general de la ecuación homogénea es de la forma  $b(r) = b_1(r) + U_1(r)b_1(r)$ , es decir:

$$b(r) = C_1^* \left( \frac{r}{\alpha + 2r} \right)^5 e^{\frac{2\alpha}{r}} + 2 \left( \frac{r}{\alpha + 2r} \right)^5 \times e^{\frac{2\alpha}{r}} \int dr e^{-\frac{2\alpha}{r}} (\alpha + 2r)^4 \times \frac{(-\alpha kr^3 + \alpha^2 - \alpha^2 kr^2 - 3kr^4)}{r^6} \quad (103)$$

Si  $\alpha = 0$  ( $\Phi = 0$ ) obtenemos

$$b(r) = -kr^3 + b_0 + kr_0^3 \quad (104)$$

donde  $b(r = r_0) = b_0$  en la garganta del agujero de gusano.

Con la anterior función de forma la densidad total, la tensión por unidad de área, la presión y el flujo de energía (ecuaciones 76-79) se escriben:

$$\rho(r, t)c^2 = \frac{3}{k^*\Omega^2 c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \quad (105)$$

$$\tau(r, t) = -\frac{1}{k^*} \left( \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) - \frac{1}{\Omega^2} \left( \frac{b_0}{r^3} + k \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 \right) \right) \quad (106)$$

$$P(r, t) = \frac{1}{k^*} \left( \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left( \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) + \frac{1}{2\Omega^2} \left( \frac{b_0}{r^3} + k \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 \right) \right) \quad (107)$$

$$h(r, t) = 0 \quad (108)$$

La última relación nos dice que para la función de forma descrita por la ecuación (104) no existe flujo de energía hacia afuera en la dirección radial.

## 12 Condiciones de energía débil: "weak energy conditions"

Las condiciones de energía débil son ( ver [8, 14])

$\rho \geq 0$ ,  $\rho c^2 - \tau \geq 0$  y  $\rho c^2 + P \geq 0$ . La primera condición  $\rho \geq 0$  implica que:

$$\frac{b'}{r^2} \geq \lambda \Omega^2 - \frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} - 3k. \quad (109)$$

De la segunda condición ( $\rho c^2 - \tau \geq 0$ ) obtenemos:

$$\frac{1}{c^2} \left( 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) \geq e^{2\Phi} \times \left( -k + \frac{b - b'r}{2r^3} - \Phi' \left( -kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) \right) \quad (110)$$

Por último, la condición  $\rho c^2 + P \geq 0$  implica que:

$$\frac{2}{c^2} \left( 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) \geq e^{2\Phi} \left( -2k - \frac{b + b'r}{2r^3} \right) - e^{2\Phi} \left( \Phi'' + (\Phi')^2 \right) \left( 1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) - e^{2\Phi} \Phi' \left( -2kr - \frac{b}{2r^2} - \frac{b'}{2r} + \frac{1}{r} \right) \quad (111)$$

Para  $\Phi = 0$  en un universo plano ( $k = 0$ ) y despreciando el valor de la constante cosmológica  $\lambda$ , las condiciones anteriores se reducen a:

$$\frac{b'}{r^2} \geq -\frac{3}{c^2} \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 \quad (112)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) \geq \frac{(b - b'r)}{2r^3} \quad (113)$$

$$\frac{2}{c^2} \left( 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) \geq -\frac{(b + b'r)}{2r^3} \quad (114)$$

En la garganta del agujero de gusano (suponiendo  $k = 0$ ), el denominado término "flare out"(ver sección 14 de la referencia [8]) es:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} \Big|_{r=b=b_0} = \frac{b - rb'}{2b^2} > 0 \quad (115)$$

Definiendo:

$$S(t) \equiv 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \quad (116)$$

la ecuación (113) implica que

$$S(t) \geq c^2 \left( \frac{b - rb'}{2b^2} \right) \left( \frac{b^2}{r^3} \right) \quad (117)$$

de manera que la condición (115) nos da:

$$S(t) \geq 0. \quad (118)$$

La anterior desigualdad nos dice que los valores de  $\Omega$  están restringidos. En general, es posible demostrar que la ecuación (117) no puede ser satisfecha en todo el dominio temporal debido a que  $\Omega$  es una función positiva y acotada. Esto significa que aunque los agujeros de gusano pueden ser creados sin la presencia de materia exótica, su tiempo de vida es finito ya que  $S(t)$  tarde o temprano llegará a ser negativo. Para la función

$$\Omega(t) = \cos t + 3 \quad (119)$$

que es estrictamente positiva y acotada tenemos:

$$S(t) = \frac{1 + 3 \cos t + \sin^2 t}{(3 + \cos t)^2} \quad (120)$$

Esta función experimenta cambios de signo dependiendo del valor de la coordenada temporal  $t$ , lo cual indica que las condiciones de energía son violadas por algunos períodos de tiempo cuando  $S(t) < 0$  (ver figura 3).

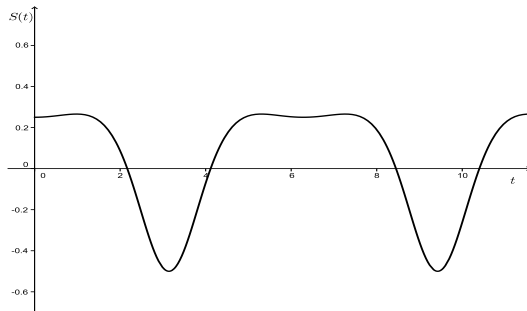


Figura 3: Función  $S(t)$

### 13 El parámetro de aceleración y $\Omega$

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker es

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - R^2(t) \left[ \frac{(dr)^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\Omega^*)^2 \right] \quad (121)$$

donde  $(d\Omega^*)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$ ,  $R(t)$  es el factor de escala del universo y  $k$  es un parámetro independiente del tiempo que especifica la curvatura del universo y

que puede ser  $k = +1$  para un universo cerrado,  $k = 0$  para un universo plano o  $k = -1$  en un universo abierto. Si consideramos agujeros de gusano conformes (conformal wormholes) inmersos en un universo en expansión en el que el factor de escala es  $\Omega(t)$ , y si  $\Phi(r) \rightarrow 0$ , entonces la métrica se puede escribir:

$$(ds)^2 = \Omega^2(t) (c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2) \quad (122)$$

El tiempo conforme  $t$  está relacionado con el tiempo comovil  $T$  a través de la relación

$$dT = \Omega dt \quad (123)$$

Entonces, podemos escribir

$$(ds)^2 = c^2 (dT)^2 - \Omega^2 \left( \frac{1}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} (dr)^2 + r^2 (d\Omega^*)^2 \right) \quad (124)$$

La constante de Hubble puede expresarse como el cociente entre la derivada con respecto al tiempo comovil del factor de escala y dicho factor de escala [15, 16]

$$H = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{d\Omega}{dT} \right) = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) \left( \frac{dt}{dT} \right) = \frac{1}{\Omega^2} \dot{\Omega}(t) \quad (125)$$

El parámetro de aceleración se define como:

$$q = - \frac{\Omega \left( \frac{d^2 \Omega}{dT^2} \right)}{\left( \frac{d\Omega}{dT} \right)^2} \quad (126)$$

que también se puede escribir

$$q = 1 - \frac{\ddot{\Omega} \Omega}{(\dot{\Omega})^2} \quad (127)$$

donde  $\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$ . Fácilmente podemos demostrar que

$$H^2 \Omega^2 (1 + q) = 2 \left( \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - \left( \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right). \quad (128)$$

Comparando al anterior ecuación con (116) vemos que:

$$S(t) = H^2 \Omega^2 (1 + q), \quad (129)$$

de manera que  $S(t) \geq 0$  si  $1 + q \geq 0$  o si  $q \geq -1$ . En palabras, la función  $S(t)$  es positiva si el parámetro de aceleración es mayor o igual a menos uno.

## Conclusiones

Una de las más fascinantes predicciones de la Teoría General de la Relatividad (TGR) de Einstein es la posible existencia de túneles en el hiperespacio conectando dos regiones asintóticamente planas en el espacio-tiempo (agujeros de gusano). La mayoría de las predicciones de la TGR han sido verificadas experimentalmente o mediante observaciones astronómicas. Por dicha razón, no sería difícil que en algún momento, en un futuro (aunque probablemente lejano), se verifique también la existencia de dichos agujeros de gusano.

En este artículo, en primer lugar, hemos calculado partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein las componentes del tensor energía-momento para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne inmerso en un background cosmológico. A partir de dichas expresiones hemos obtenido las de la densidad total de masa-energía  $\rho(r, t)$  medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano, el flujo de energía en la dirección radial hacia afuera  $h(r, t)$ , la tensión por unidad de área medida por dichos observadores en la dirección radial  $\tau(r, t)$ , y la presión medida en las direcciones laterales (ortogonales a la dirección radial)  $P(r, t)$ . También hemos analizado las superficies de inserción (embedding surfaces) para dichos agujeros y hemos calculado la expresión del parámetro de corrimiento hacia el rojo en términos del factor conforme  $\Omega$ . Posteriormente, hemos calculado la expresión matemática de la función de exotividad  $\varsigma$ . Dicha expresión se reduce para  $\Omega = 1$ ,  $\lambda = 0$  y  $k = 0$  a la obtenida en la referencia [8], ecuación (139).

Partiendo de la traza del tensor energía-cantidad de movimiento hemos obtenido una solución analítica para la función de forma de un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne en un background cosmológico (tomando  $\lambda = 0$ ). En el caso particular en que la función de corrimiento hacia el rojo  $\Phi = 0$  hemos calculado también las expresiones correspondientes de  $\rho(r, t)$ ,  $\tau(r, t)$ ,  $P(r, t)$  y  $h(r, t)$ . En dicho caso, obtuvimos  $h(r, t) = 0$ , de manera que no hay flujo de energía en la dirección radial (hacia afuera).

Al estudiar las condiciones de energía débil para un universo plano ( $k = 0$ ) sin constante cosmológica ( $\lambda = 0$ ) y tomando  $\Phi = 0$ , hemos introducido una función  $S(t)$  (ver sección (12)) mediante la cual hemos podido demostrar que los valores del factor de forma  $\Omega$  están restringidos en el dominio temporal. Esto implica que los agujeros de gusano pueden ser creados sin la presencia de materia exótica, y que su tiempo de vida es finito ya que dicha función  $S(t)$ , tarde o temprano, llegará a ser negativa. Tomando, por ejemplo,  $\Omega(t) = \cos t + 3$  que es una función estrictamente positiva y acotada hemos visto que las condiciones de energía débil son violadas por algunos períodos de tiempo cuando  $S(t) < 0$ .

Finalmente, hemos deducido una expresión que nos da el parámetro de aceleración del universo en función del

factor conforme  $\Omega$  (en el caso de que la función de corrimiento hacia el rojo sea igual a cero), así como una ecuación que relaciona la mencionada función  $S(t)$  con el parámetro de aceleración y el parámetro de Hubble. A partir de la última relación mencionada, hemos podido demostrar que la función  $S(t)$  es positiva siempre que el parámetro de aceleración sea mayor o igual a -1.

## Referencias

- [1] Thorne, K.S. 1994. "Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy." W. W. Norton & Company: New York, NY.
- [2] Kaku, M. 1994. "Hyperspace." Oxford University Press, Inc: New York, NY.
- [3] Kenyon, I. R. 1996. "General Relativity." Oxford University Press: Oxford, UK.
- [4] Schutz, B. F. 2005. "A first course in general relativity." Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- [5] Marín, C. 2009. "Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild." *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 1(1): 79-90.
- [6] Marín, C. 2007. "La Expansión del Universo, Una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas." Universidad San Francisco de Quito: Quito, Ecuador.
- [7] Morris, M. S.; Thorne, K. S. 1988. "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity." *Am J. Phys.* 56(5): 395-412.
- [8] Marín, C. 2010. "Agujeros de gusano: solución exponencial." *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 2(2): A36-A54.
- [9] Marín, C. 2011. "Agujeros de gusano y potenciales efectivos." *Avances en Ciencias e Ingenierías*. 3(1): A13-A23.
- [10] Ludvigsen, M. 1999. "General Relativity a Geometric Approach." Cambridge University Press: Cambridge, UK.
- [11] Turner, M. ; Kolb E. 1990. "The Early Universe." Addison Wesley: Redwood City, MS.
- [12] Misner, C. W.; Thorne, K.S.; Wheeler, J. A. 1973. "Gravitation." W. H. Freeman & Company: New York, NY.
- [13] Anchordoqui, L. ; Torres, D. ; Trobo, M. ; Perez, S. 1998. "Evolving wormhole geometries." *Phys. Rev. D*. 57: 829-833.
- [14] Lobo, F. S. 2005. "Energy conditions, Traversable wormholes and dust shells." *Gen. Rel. Grav.* 37: 2023-2038.
- [15] Hochberg, D. ; Visser, M. 1997. "Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat." *Phys. Rev. D*. 56: 4745-4755.
- [16] Peacock, J. A. 2002. "Cosmological Physics." Cambridge University Press: Cambridge, UK.