

## Cota Inferior de Crámer-Rao en la Estimación del Tiempo de Llegada en un Canal Rice

René P. Játiva E.<sup>1\*</sup> Josep Vidal M.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Colegio de Ciencias e Ingeniería –El Politécnico–, Universidad San Francisco de Quito  
Diego de Robles s/n y Vía Interoceánica, Quito, Ecuador

<sup>2</sup>Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones Universidad Politécnica de Cataluña  
E-mail: rjativa@usfq.edu.ec

Editado por/Edited by: D. Cárdenas, M.Sc.

Recibido/Received: 06/02/2012. Aceptado/Accepted: 06/20/2012.

Publicado en línea/Published on Web: 06/30/2012. Impreso/Printed: 06/30/2012.

### Abstract

This document introduces a Rice mobile channel model suitable for the study of parameters of interest that modifies the accuracy in the estimation of the Time Of Arrival (TOA) for the signal emitted from a mobile station, operating in a DS-SS. This work shows the receiver performance in terms of the available number of channel estimates, the number of sensors in the antenna array and the type of signal source when sampling rate is higher than the chip rate. Received signal is modeled from time-space stochastic distributions and the cases of partially coherent distributed sources as well as fully coherent distributed sources and fully incoherent distributed sources are considered.

**Keywords.** Cramer-Rao Bounds (CRB), Direct Sequence Spread Spectrum (DS-SS), Rice Channel, Temporal and Spatial Diversity.

### Resumen

Este documento introduce un modelo para el estudio de un canal móvil de tipo Rice, utilizado para el estudio de los parámetros de interés que modifican la precisión en la estimación del instante de Tiempo de Arribo (TOA) de la señal emitida por un suscriptor móvil que opera en un sistema en acceso múltiple por división en código (CDMA) que hace uso de un correlador como parte de su operación. Este trabajo muestra el desempeño del receptor en función del número de estimaciones de canal disponibles, el número de sensores que conforman el arreglo de antenas y el tipo de fuente de señal cuando la tasa de muestreo es superior a la tasa de chip. La señal recibida se modela a partir de distribuciones estocásticas, y se consideran tanto los casos de fuentes distribuidas parcialmente coherentes, como los casos de fuentes completamente coherentes y completamente incoherentes.

**Palabras Clave.** Cramer-Rao Bounds (CRB), CDMA, Rice Channel, Diversidad Temporal y Espacial.

### Introducción

Los servicios basados en localización (LBS) continúan creciendo a un ritmo vertiginoso. Nadie discute sus beneficios sino más bien el abuso del que podemos ser objeto si su uso es indiscriminado. En efecto, casi todos encontraremos útil en ciertas circunstancias, el poder pagar una lata de gaseosa sencillamente presionando una tecla de nuestro teléfono celular, si encontramos una máquina dispensadora a nuestro alcance, pero muchos objetaremos la molestia de cierta publicidad al entrar en el área de un centro comercial. En todo caso, sea cual sea la aplicación que puede darse a la información de posición, lo cierto es que la investigación en esta área continúa en la búsqueda de nuevos y mejores esquemas que permitan el estimar la posición con un mayor grado

de certidumbre. Así por ejemplo, atendiendo a la degradación de la posición inherente al uso de dispositivos móviles equipados con GPS en interiores, se ha procurado precisamente caracterizar mejor esta señal [1], además como buscar nuevas alternativas que complementen o faciliten este trabajo tales como sistemas basados en plataformas inerciales [2], Wi-Fi, RFID, Bluetooth, Infrarojos [3], ultrasonido [4], sensores dópler [5], etc.

El interés de este artículo es contribuir a entender mejor desde una perspectiva conceptual los beneficios y limitaciones que involucra el uso de sistemas de espectro disperso de secuencia directa (DS-SS del inglés Direct Sequence Spread Spectrum) en la estimación del instante de llegada (TOA del inglés Time Of Arrival) de la señal. Recordemos que el uso de DS-SS permite al

receptor identificar las componentes de señal originadas en propagación multitrayecto, y posibilita su aprovechamiento en términos de diversidad. Esta información puede utilizarse como variable de mediación para el estudio del comportamiento de esquemas de posicionamiento basados en red, el cual ha sido objeto de interesantes investigaciones a lo largo del tiempo [6, 7].

Los resultados mostrados en este artículo complementan los presentados en [8, 9] y asumen que el proceso de estimación del primer retardo es el mejor posible. En este sentido es un modelo simplificado pues asume la presencia de un único clúster de señal originado por la propagación multitrayecto. Sin embargo esta asunción es muy razonable en entornos con línea de vista (LOS del inglés Line Of Sight), es decir que el canal de propagación es de tipo Rice. Los lectores interesados en el modelamiento estadístico de canal basado en geometría (GBSC), sus propiedades y su aplicación a comunicaciones móviles de tercera y cuarta generación pueden referirse a [10, 11, 12].

A partir de la determinación de la Cota Inferior de Crámer-Rao (CRLB de sus siglas en inglés), se estudia el impacto sobre la precisión en la estimación del TOA para el primer retardo en función de parámetros tales como: el número de estimaciones de canal disponibles, el número de sensores que constituyen el arreglo de la antena, el grado de coherencia temporal en las estimaciones de canal que se utilizan para el proceso de estimación de TOA y el período de muestreo cuando éste se realiza a una velocidad mayor que la tasa de chips del sistema.

### Consideraciones del Modelo

Este trabajo está estrechamente relacionado con otro en el que se estudió el impacto de varios de estos parámetros pero bajo el supuesto de que la señal LOS se encontraba muy atenuada por lo cual el canal de propagación podía modelarse como Rayleigh [10]. En el caso actual se asume que la componente LOS está presente y por ende el canal es Rice. Sin embargo, la señal dispersa está presente y se caracteriza estocásticamente como antes. El error en la estimación del instante de llegada (TOA) se calcula utilizando la Cota Inferior de Cramer-Rao (CRB) a partir del modelo de señal que describe el escenario móvil [8, 9].

El modelo toma en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Se asume que el canal tiene un tiempo de coherencia para las amplitudes que siguen las expresiones de Jakes usuales, sin embargo el tiempo de coherencia de retardos y ángulos de llegada es mucho mayor, siendo posible obtener muchas estimaciones de canal a objeto de mejorar la precisión de las estimaciones de TOA.
2. El ruido presente en las estimaciones de canal es blanco y gaussiano.

3. El ruido es incoherente en retardo y ángulo, lo cual corresponde a una situación en la cual el suscriptor móvil se mueve y los diferentes rayos reflejados experimentan desvanecimiento rápido incorrelado.
4. Se asumen un modelo lineal de Markov de primer orden para la variación temporal en el canal.
5. Un espectro de potencia continua se utiliza para modelar la función de densidad marginal de retardo, y se asume que esta se ajusta a una exponencial según se propone en Pedersen [14], y se la estima a una fracción del tiempo de chip. Se asume también la misma distribución angular para todos los retardos. En este sentido se asume que la señal se agrupa en un único clúster lo cual tiene bastante sentido en condiciones LOS, como es en este caso.

### Modelo De Canal

La señal observada en un conjunto de  $K$  estimaciones del vector de canal sobre  $N_s$  sensores. Cada estimación del vector de canal  $\mathbf{z}$  es de longitud  $N(N-1 \text{ retardos})$ , y se asume que se ha conseguido de la correlación de la señal recibida con una secuencia conocida.

La señal que se recibe en el sensor  $j$  se nota por  $y^{(j)}(t)$ , y se conforma de la superposición de las componentes multi-trayecto y del ruido  $n^j(t)$ . cada componente se ve afectada por el coeficiente de apuntamiento de la antena de potencia unitaria  $b_{i,j}(t)$ , del factor de atenuación  $\gamma_i(t)$ , de la frecuencia dópler  $f_i$  sobre intervalos de extensión  $KTs$ , y del retardo de llegada  $\tau_i$ , donde “i” identifica a cada componente de entre las  $N_{paths}$  que alcanzan el receptor.

$$y^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{N_{paths}} b_{i,j}(t) \gamma_i(t) x(t - \tau_i) e^{j2\pi f_i t} + n^{(j)}(t) \quad (1)$$

La señal transmitida  $x(t)$  corresponde a la convolución de la secuencia de pseudo-ruido  $p(n)$  con el pulso de conformación  $g_p(t)$  como se muestra en (2), donde  $T$  es el tiempo de símbolo.

$$x(t) = \sum_n g_p(t - nT) p(n) \quad (2)$$

Un correlador estima el canal a partir de la señal recibida en el sensor  $j$  y en el instante  $s$ , con la ayuda de la secuencia de pseudo-ruido  $p(n)$  de longitud  $N_p$ .

$$z_s^{(j)}(t) = \frac{1}{N_p} \sum_n y^{(j)}(t + \tau_s + nT) p^*(n) \quad (3)$$

Si se incorporan las expresiones (1) y (2) en (3), es fácil darse cuenta que el coeficiente de canal,  $z_s^{(j)}(k)$ , para un sensor particular  $j$  y un lag  $s$  puede modelarse en términos del coeficiente de apuntamiento de cada sensor, del factor de atenuación del multi-trayecto y su dópler, de la amplitud del pulso conformador, además de una

porción de ruido residual como se muestra en (4). De esta manera, en forma compacta el vector de canal se modela a partir de la firma espacial sobre el arreglo de sensores en la antena,  $\mathbf{b}_j$ , la potencia estimada para el trayecto recibido,  $P_i$ , su frecuencia Doppler normalizada  $f_i$ , y el vector correspondiente al pulso conformador  $\mathbf{g}^{(i)}$ ; además de una componente de ruido  $\mathbf{w}^{(j)}$ , donde  $k_0$  corresponde al instante de muestreo para el primer retardo, como se muestra en (5).

$$z_s^{(j)}(k) = \sum_{i=1}^{N_{paths}} b_{ij}(k) \gamma_i(k) e^{j2\pi f_i t} g(\tau_s - \tau_i) + w_i^{(j)}(k) \quad (4)$$

$$\mathbf{z}^{(j)}(k) = \sum_{i=k_0}^N b_j P_i e^{j2\pi f_i t} \mathbf{g}(\tau_s - \tau_i) + \mathbf{w}_i^{(j)}(k) \quad (5)$$

El vector  $\mathbf{g}^{(i)}$  contiene las muestras del pulso conformador, siendo "i" la posición de su máximo,  $g_p(0)$  y se muestra en (6).

$$\mathbf{g}^{(i)} = [g_p(-i+1) \dots g_p(0) \dots g_p(N-i)]^T \quad (6)$$

Tanto la porción correspondiente a la señal del vector de canal,  $\mathbf{z}^{(j)}(k)$ , como su correspondiente vector de ruido pueden describirse como procesos aleatorios Gaussianos caracterizados por sus correspondientes matrices de correlación. Adicionalmente, en el caso de disponer de una componente de visión directa (LOS), la media del vector de canal no será cero. Si se asume que el ruido es temporalmente incorrelado, independiente de la señal y de varianza  $\sigma_w^2$ , y notando que la porción correspondiente a la componente NLOS dispersa en la sumatoria en (5) tiene media cero, y que además los mecanismos de dispersión y d\`oppler son independientes, el valor esperado del vector de canal estimado,  $\boldsymbol{\mu}_z$  puede calcularse como en (7), donde  $P_0$  es la potencia estimada de la componente LOS, y  $f_0$  su frecuencia d\`oppler:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{z}^{(j)}(k)\} &= E\{b_j P_0 e^{j2\pi f_0 k} \mathbf{g}^{(k_0)}\} \\ &= P_0 E\{b_j\} E\{e^{j2\pi f_0 k}\} \mathbf{g}^{(k_0)} \end{aligned} \quad (7)$$

La expresión (5) puede describirse como en (8), donde el elemento  $i$  del vector  $\mathbf{b}^{(j)}(k)$  contiene  $b_{ij}(k) P_i e^{j2\pi f_i k T_s}$ , y la matrix  $\mathbf{G}$  modela los retardos del pulso conformador. La longitud de estos vectores  $N$ , es el número de estimaciones en la ventana de observación.

$$\mathbf{z}^{(j)}(k) = \mathbf{G} \mathbf{b}^{(j)}(k) + \mathbf{w}^{(j)}(k) \quad (8)$$

Adicionalmente, si los vectores se arreglan linealmente como se muestra en (9), tanto las señales como el ruido pueden describirse como procesos aleatorios Gaussianos con ciertas medias y matrices de covarianza, como se muestra en (10).

$$\mathbf{w}^{(j)} = [\mathbf{w}^{(j)}(1)^T \dots \mathbf{w}^{(j)}(k)^T \dots \mathbf{w}^{(j)}(K)^T]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{w} \sim CN(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I}), \quad \mathbf{z} \sim CN(\boldsymbol{\mu}_z, \mathbf{R}_z) \quad (10)$$

En este caso el vector de estimaciones de canal toma la forma en (11) y el valor esperado del vector de canal estimado  $\boldsymbol{\mu}_z$ , se expresa en términos de la firma espacial de la componente LOS  $\mathbf{b}_\phi$ , del vector d\`oppler esperado y del vector de conformación de pulsos correspondiente a la primera llegada, asociada con la componente LOS  $\mathbf{g}_0^k$ , como se muestra en (12):

$$\mathbf{z}^{(j)} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{I}_K) \mathbf{b}^{(j)} + \mathbf{w}^{(j)} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu}_z = E\{\mathbf{b}\} \otimes E\{e^{j2\pi f_0 k}\} \otimes P_0 \mathbf{g}^{(k_0)} \quad (12)$$

Así mismo, es fácil darse cuenta que la matriz de covarianza para las estimaciones del vector de canal,  $\mathbf{R}_z$ , se corresponde con la matriz de Correlación para el caso NLOS y canal Rayleigh [8], y puede expresarse en términos de sus componentes temporal y espacial, como se muestra en (13). En esta expresión, el factor de potencia de la señal  $P_s$ , se refiere a la varianza de la potencia recibida estimada para el primer retardo de la señal temporalmente dispersa en el caso de propagación Rayleigh; la matriz de conformación de pulso  $\mathbf{G}_s(\beta)$ , depende del factor de roll-off  $\beta$ , y modela la contribución del pulso conformador, mientras que  $\Lambda_\tau$  es una matriz diagonal que modela la dispersión temporal de la señal y su distribución de potencia exponencial. Por otro lado, la matriz de correlación temporal,  $\mathbf{T}(\alpha)$ , toma en consideración la variación temporal del canal asociada al efecto d\`oppler, y se asume idéntica para todos los retardos; la matriz de correlación espacial,  $\mathbf{R}_\phi(bf\rho)$ , contiene los coeficientes de correlación para las firmas entre sensores, y  $\otimes$  denota el producto de Kronecker.

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_\phi(\rho) \otimes \mathbf{T}(\alpha) \otimes P_s \mathbf{G}_s(\beta) \Lambda_\tau(\lambda_n) \mathbf{G}_s^H(\beta) + \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (13)$$

Basta recordar que la variación temporal se modela como un proceso auto-regresivo de orden 1, que la correlación temporal entre dos slots consecutivos se nota por el coeficiente  $\alpha$ , y que la matriz de correlación espacial contiene la correlación de las firmas espaciales entre los sensores del arreglo  $\rho_{ij}$ . En efecto, la matriz de correlación espacial  $\mathbf{R}_\phi(\rho)$ , es Toeplitz y para su caracterización basta conocer la primera columna  $\rho$ . Estas matrices toman la forma que se muestra en (14)-(16).

$$\mathbf{R}_\phi(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N_s} \\ \rho_{12}^* & 1 & \dots & \rho_{2N_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N_s}^* & \rho_{2N_s}^* & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \dots & \alpha^{K-1} \\ \alpha & 1 & \dots & \alpha^{K-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{K-1} & \alpha^{K-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{G}_s(\beta) = \frac{1}{\sqrt{T_c(1-\beta/4)}} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{s1} & \mathbf{g}_{s2} & \dots & \mathbf{g}_{sN} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Más detalles respecto de estas matrices pueden encontrarse en [8, 9].

Si definimos el vector de variación temporal  $\alpha_t(\alpha)$  como en (17), la expresión (12) llega a ser la (18), donde  $\mathbf{b}_\phi(\rho)$  corresponde precisamente al vector esperado de firmas espaciales.

$$\alpha_t(\alpha) = [1 \quad \alpha \quad \alpha^2 \quad \dots \quad \alpha^{K-1}]^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\mu}_z = \mathbf{b}_\phi(\rho) \otimes \alpha_t(\alpha) \otimes P_0 \mathbf{g}^{(k_0)}(\beta) \quad (18)$$

### Derivación de la Cota Inferior de Crámer-Rao para el canal Rice.

Para derivar las cotas de Crámer-Rao (CRB) para la condición LOS basta con ampliar el vector de parámetros  $\boldsymbol{\psi}$ , de forma de incluir la variable  $P_0$ , tal como se muestra en (19).

$$\boldsymbol{\Psi} = [k_0, \lambda_n, \beta, P_s, \sigma_w^2, \alpha, \boldsymbol{\rho}^T, P_0]^T \quad (19)$$

En este vector de parámetros,  $k_0$  se refiere al instante de llegada de la componente LOS normalizado para el tiempo de chip,  $T_c$ ;  $\lambda_n$  es el inverso de la dispersión de retardos normalizado para el intervalo de chip, y los demás parámetros ya han sido definidos antes. El parámetro de interés es precisamente  $k_0$ .

$N_c$  cuenta el número de coeficientes de correlación espacial y se relaciona con el número de sensores [8].

Las CRB se calculan a partir de la Matriz de Información de Fisher (FIM) a partir de la expresión (20) [8, 13]:

$$[\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Psi}}^{LOS}] = \text{Tr} \left( \mathbf{R}_z^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \boldsymbol{\Psi}_p} \mathbf{R}_z^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \boldsymbol{\Psi}_q} \right) + 2\text{Re} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_z^H}{\partial \boldsymbol{\Psi}_p} \mathbf{R}_z^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}_z}{\partial \boldsymbol{\Psi}_q} \right) \quad (20)$$

Esta matriz fue calculada para la componente dispersa NLOS [8] a partir de las derivadas de su matriz de correlación respecto de los parámetros en el modelo, y debe actualizarse para el caso de disponer una componente LOS como se muestra en (21) y (22), donde  $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\psi}}$  se corresponde precisamente con la FIM para el caso de canal Rayleigh y el vector de parámetros algo más reducido. La matriz  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}}$  se encarga de introducir los términos faltantes, mientras que la matriz  $\mathbf{H}^{LOS}$  de ampliar la dimensión de la FIM anterior para actualizarla al caso actual.

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\Psi}}^{LOS} = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{\psi}} = \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{k_1=1}^K H_{k,k_1}^{LOS} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\psi}} H_{k,k_1}^{LOS T} + C_1 \mathbf{e}_{N_p}^{(6)} \mathbf{e}_{N_p}^{(6)T} + \sum_{q_1=1}^{2N_c} \sum_{q_2=1}^{2N_c} C_2^{(q_1, q_2)} \mathbf{e}_{N_p}^{(6+q_1)} \mathbf{e}_{N_p}^{(6+q_2)T} \quad (22)$$

$$H_{k,k_1}^{LOS} = \begin{bmatrix} H_{k,k_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(7+2N_c) \times 5} \quad (23)$$

Recordemos que el cálculo de las derivadas de la matriz de correlación de estimaciones del canal y su inversa se facilita de la descomposición en valores singulares de

las matrices de correlación espacial (24) y temporal (25) y que pueden calcularse como el producto de Kronecker de tres matrices conforme a la expresión (27) y a los valores mostrados en la Tabla 1 [8].

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\phi &= \mathbf{U}_\phi \boldsymbol{\Lambda}_\phi \mathbf{U}_\phi^H \\ \mathbf{U}_\phi &= [\mathbf{u}_\phi^{(1)}, \mathbf{u}_\phi^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_\phi^{(N_s)}] \\ \boldsymbol{\Lambda}_\phi &= \text{diag} [\lambda_\phi^{(1)}, \lambda_\phi^{(2)}, \dots, \lambda_\phi^{(N_s)}] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{U}_t \boldsymbol{\Lambda}_t \mathbf{U}_t^H \\ \mathbf{U}_t &= [\mathbf{u}_t^{(1)}, \mathbf{u}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_t^{(K)}] \\ \boldsymbol{\Lambda}_t &= \text{diag} [\lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)}, \dots, \lambda_t^{(K)}] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z^{-1} &= \sum_{k=1}^{N_s} \mathbf{u}_\phi^{(k)} \mathbf{u}_\phi^{(k)H} \otimes \sum_{k_1=1}^{N_s} \mathbf{u}_t^{(k_1)} \mathbf{u}_t^{(k_1)H} \\ &\quad \otimes \left( \lambda_\phi^{(k)} \lambda_t^{(k_1)} P_s \mathbf{G}_s \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \boldsymbol{\Psi}_i} = \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{B}_i \otimes \mathbf{C}_i \quad i = p, q \quad (27)$$

i=p,q	$\boldsymbol{\Psi}_i$	$\mathbf{A}_i$	$\mathbf{B}_i$	$\mathbf{C}_i$
1	$k_0$	$\mathbf{R}_\phi$	$\mathbf{T}$	$P_s \mathbf{G}_s \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_\tau}{\partial k_0} \mathbf{G}_s^T$
2	$\lambda_n$	$\mathbf{R}_\phi$	$\mathbf{T}$	$P_s \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_\tau}{\partial \lambda_n}$
3	$\beta$	$\mathbf{R}_\phi$	$\mathbf{T}$	$P_s \frac{\partial (\mathbf{G}_s \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^T)}{\partial \beta}$
4	$P_s$	$\mathbf{R}_\phi$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{G}_s \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^T$
5	$\sigma_w^2$	$\mathbf{I}_{N_s}$	$\mathbf{I}_K$	$\mathbf{I}_K$
6	$\alpha$	$\mathbf{R}_\phi$	$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha}$	$P_s \mathbf{G}_x \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^T$
7:6+N <sub>c</sub>	$\rho_{i-6, Re}$	$\frac{\partial \mathbf{R}_\phi}{\partial \rho_{i-6, Re}}$	$\mathbf{T}$	$P_s \mathbf{G}_x \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^T$
7+N <sub>c</sub>	$\rho_{i-6, Im}$	$\frac{\partial \mathbf{R}_\phi}{\partial \rho_{i-6, Im}}$	$\mathbf{T}$	$P_s \mathbf{G}_x \boldsymbol{\Lambda}_\tau \mathbf{G}_s^T$
:6+2N <sub>c</sub>				

Tabla 1: Resultados de las derivadas de la Matriz de Correlación de Estimaciones de Canal  $\mathbf{R}_z$  en el caso NLOS requeridas en (26).

Las derivadas de los auto-vectores de la matriz de correlación temporal respecto al coeficiente de correlación temporal  $\alpha$ , requeridas se calcularon numéricamente para obtener las CRB en este artículo.  $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}}$  en (21) se calcula como en (28), donde los parámetros requeridos para evaluar esta matriz se muestran en las expresiones (29)-(31) y  $\odot$  denota el producto de Hadamard.

$$[\mathbf{B}_{\boldsymbol{\psi}}]_{pq} = 2\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{N_s} D_{1,p,q}^{(k)} \sum_{k_1=1}^K D_{2,p,q}^{(k_1)} D_{3,p,q}^{(k,k_1)} \right\} \quad (28)$$

En particular  $D_{1,p,q}$  en (29) corresponde claramente a la contribución de los diferentes sensores en el arreglo,  $D_{2,p,q}$  en (30) revela la contribución de cada estimación temporal, y finalmente  $D_{3,p,q}$  en (31) exhibe el impacto de la diversidad multi-trayecto y el pulso conformador sobre la FIM.

$$D_{1,p,q}^{(k)} = \mathbf{1}_{N_s}^T \left( \mathbf{u}_\phi^{(k)} \mathbf{u}_\phi^{(k)H} \odot A_p^{(1)} A_q^{(1)} \right) \mathbf{1}_{N_s} \quad (29)$$

$i=p,q$	$\Psi_i$	$\mathbf{A}_i^{(1)}$	$\mathbf{A}_i^{(2)}$	$\mathbf{A}_i^{(3)}$
1	$k_0$	$\mathbf{b}_\phi(\rho)$	$A_0 \alpha$	$\frac{\partial \mathbf{g}(k_0)}{\partial k_0}$
2	$\lambda_n$	0	0	0
3	$\beta$	$\mathbf{b}_\phi(\rho)$	$A_0 \alpha$	$\frac{\partial \mathbf{g}(k_0)}{\partial k_0}$
4	$P_s$	0	0	0
5	$\sigma_w^2$	0	0	0
6	$\alpha_t$	$\mathbf{b}_\phi(\rho)$	$A_0 \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_t}$	$\mathbf{g}(k_0)$
$7:6+N_c$	$\rho_{i-6,Re}$	$\frac{\partial \mathbf{b}_\phi}{\partial \rho_{i-6,Re}}$	$A_0 \alpha$	$\mathbf{g}(k_0)$
$7+N_c:6+2N_c$	$\rho_{i-6,Im}$	$\frac{\partial \mathbf{b}_\phi}{\partial \rho_{i-6,Im}}$	$A_0 \alpha$	$\mathbf{g}(k_0)$
$7+2N_c$	$A_0$	$\mathbf{b}_\phi(\rho)$	$\alpha$	$\mathbf{g}(k_0)$

Tabla 2: Resultados de la derivación del vector esperado de estimaciones de canal  $\mu_z$  a insertarse en (29)-(31).

$$D_{2,p,q}^{(k_1)} = \mathbf{1}_K^T \left( \mathbf{u}_T^{(k_1)} \mathbf{u}_T^{(k_1)H} \odot A_p^{(2)} A_q^{(2)} \right) \mathbf{1}_K \quad (30)$$

$$D_{3,p,q}^{(k,k_1)} = A_p^{(3)} R_{k,k_1}^{-1} A_q^{(3)} \quad (31)$$

Los términos  $A_p^{(i)}$  y  $A_q^{(j)}$  requeridos para el cálculo de los factores anteriores se relacionan con los resultados de las derivadas parciales de  $\mu_z$  en (20) y deben extraerse de la Tabla 2.

## Resultados y discusión

A continuación se presentan algunos resultados de interés que relacionan el error en la determinación del retardo de la componente LOS con algunos parámetros relevantes del modelo:

**Resultado 1:** Comportamiento de la Cota de Error en la estimación del instante de llegada de la señal (TOA) con la Relación Señal a Ruido de la Señal Dispersa, el nivel de potencia de la componente de visión directa (LOS) y la correlación entre los vectores de canal bajo propagación Rice.

La Figura 1 muestra la cota de error en la estimación del instante de llegada para el caso de propagación Rice como una función de la relación señal a ruido de la componente dispersa para dos valores diferentes de la potencia media de la componente LOS. Para la generación de los resultados el número de estimaciones del vector de canal se ha colocado en 50, la tasa de muestreo en dos veces la tasa de chip, el factor de roll-off en 0.5 y el número de sensores en el arreglo en 2. La dispersión temporal se ha colocado en  $2T_c$  y la dispersión angular en  $5^\circ$ . La señal llega frontalmente. La gráfica en la parte superior corresponde al caso en que la componente LOS se encuentra 3 dB por debajo de la potencia de la señal dispersa y la gráfica en la parte inferior al caso en que la componente LOS se encuentra 3dB por encima de la potencia de la señal dispersa.

La primera observación de interés es que el error de estimación se reduce para entornos correlados temporalmente cuando una componente LOS está presente. Este

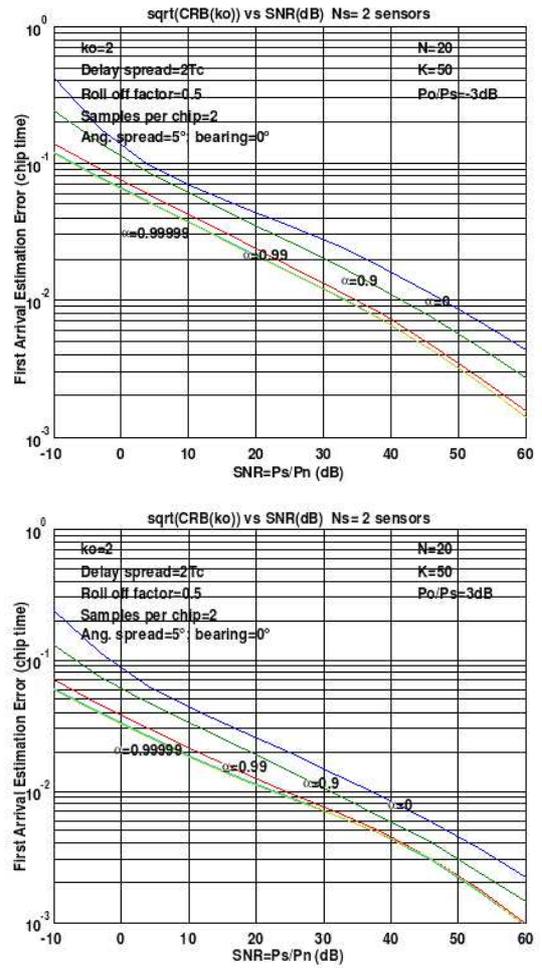


Figura 1: CRB del error en la estimación de la componente LOS en función de la relación señal a ruido de la componente dispersa y del factor de correlación temporal  $\alpha$ .

comportamiento es precisamente el opuesto al esperado en el caso de propagación Rayleigh. En efecto, las cotas calculadas para el caso de propagación Rice son más bajas que las esperadas bajo la condición NLOS y decaen todavía más conforme la potencia de la componente LOS se incrementa. La mejoría es notoria al pasar de fuentes completamente incoherentes (ICD) hasta fuentes parcialmente coherentes (PCD) con factores de correlación menores a 0,99. Después de este valor la mejoría es despreciable. Por ejemplo observe en la Figura 1 como el error conseguido para una fuente ICD con SNR=20dB para la componente dispersa y potencia de componente LOS 3dB por debajo de la componente NLOS corresponde aproximadamente a  $4,5 \times 10^{-2} T_c$  y decae a  $2,5 \times 10^{-2} T_c$  en el caso de una fuente PCD con  $\alpha = 0,9$ , y a  $2,0 \times 10^{-2} T_c$  en el caso de una fuente completamente coherente (FCD) con  $\alpha = 0,99999$ . Si comparamos estos valores con los resultados esperados para el caso de propagación Rice en el cual tenemos una cota de error de aproximadamente  $0,7 T_c$  para el caso FCD y de  $0,15 T_c$  para el caso ICD, tenemos una mejoría sustancial para el caso FCD de alrededor de 35 y de algo más de 3 para el caso ICD. Si asumimos op-

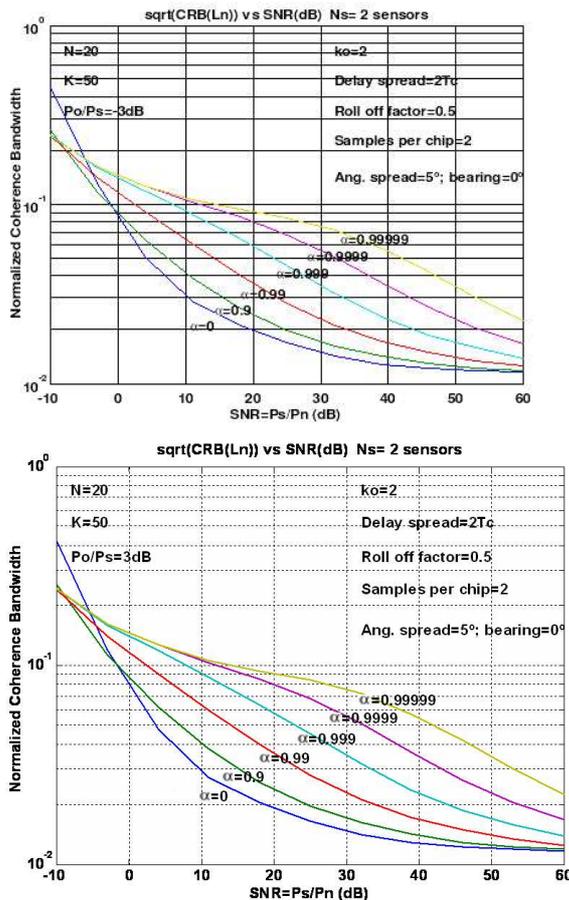


Figura 2: CRB del factor inverso normalizado de la dispersión angular  $\lambda_n$  en función de la relación señal a ruido de la componente dispersa (SNR) y del factor de correlación temporal,  $\alpha$ . Número de estimaciones del vector de canal colocado en 50, tasa de muestreo igual a dos veces la tasa de chip, roll-off factor de 0,5 y dos sensores. Factor de dispersión temporal igual a  $2T_c$ , dispersión angular de  $5^\circ$ . La señal llega frontalmente hacia el arreglo. A) Superior: Potencia de la componente LOS 3dB por debajo de la Potencia de la señal dispersa. B) Inferior: Potencia de la componente LOS 3dB por encima de la señal dispersa.

timistamente una relación lineal entre la incertidumbre en la estimación de TOA y el posicionamiento del suscriptor móvil estamos hablando de alrededor de 55m en el caso FCD NLOS respecto de 1,7m en el caso FCD LOS. Cuando la potencia de la componente LOS crece en 6B respecto del valor anterior, la cota del error en la estimación del TOA reduce a la mitad para el caso FCD. Este resultado muestra la importancia que tiene el disponer de una componente LOS en la estimación de TOA y por ende en la determinación de la posición a partir de la observación de los instantes de llegada de la señal y la degradación que implica la pérdida de la LOS en entornos obstruidos y el esfuerzo que debe ponerse en la mitigación de los efectos adversos de la condición NLOS.

La segunda observación interesante es el hecho de que la incertidumbre en la estimación del error reduce sin cota conforme la SNR mejora en condiciones de LOS, lo cual significa que idealmente en este caso la incer-

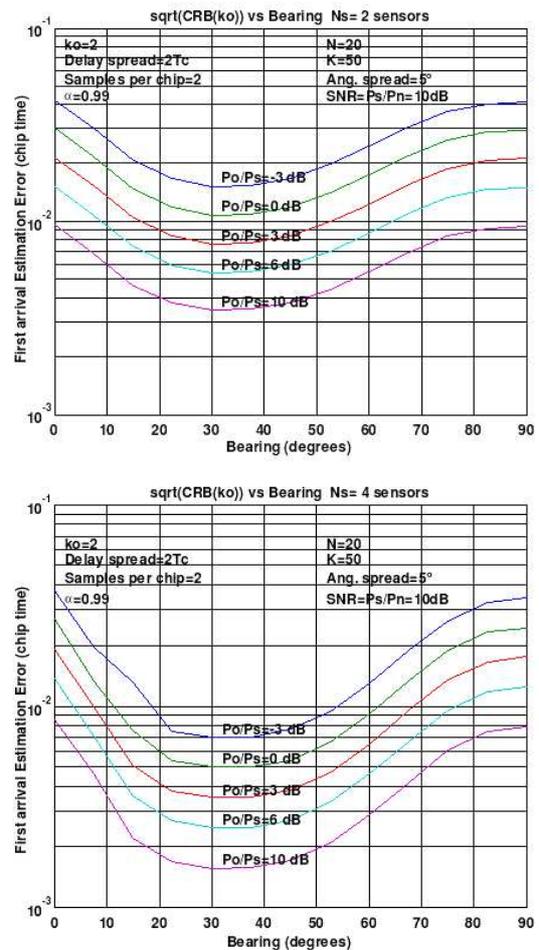


Figura 3: CRB del error en la estimación del TOA de la componente LOS en función de la dirección de llegada de la señal (DOA) y del nivel de potencia de la componente LOS. Número de estimaciones del vector de canal colocado en 50, tasa de muestreo igual a dos veces la tasa de chip y roll-off factor de 0,5. Factor de dispersión temporal igual a  $2T_c$ , dispersión angular de  $5^\circ$  y relación señal a ruido de la componente dispersa  $SNR=10$  dB. Fuente altamente correlada temporalmente ( $\alpha=0,99$ ). A) Superior: Dos sensores. B) Inferior: Cuatro sensores.

tidumbre estaría limitada únicamente por la relación SNR. Por ejemplo, cuando la  $SNR=5$ dB para la componente dispersa y  $\alpha = 0,99$ , la cota de error pasa de  $6 \times 10^{-2} T_c$  a  $3 \times 10^{-2} T_c$  cuando la potencia de la componente LOS se incrementa en 6 dB. Esto significaría que se reduce la incertidumbre en el posicionamiento desde aproximadamente 5 m a aproximadamente la mitad.

Por otra parte, como se observa en la Figura 2, las cotas correspondiente al factor inverso normalizado de dispersión temporal  $\lambda_n$ , parecen no ser molestadas por el cambio en el nivel de la potencia de la componente LOS, y la tendencia respecto del coeficiente de correlación temporal se mantiene en forma muy aproximada a lo observado en el modelo NLOS. Por ejemplo, mire en la figura como la cota del error para una  $SNR=20$  dB y una fuente PCD con  $\alpha = 0,9$  y potencia de la componente LOS  $\pm 3$ dB respecto de la potencia de la señal dispersa cuando se usan dos sensores corresponde a  $2.0 \times 10^{-2}$  y crece

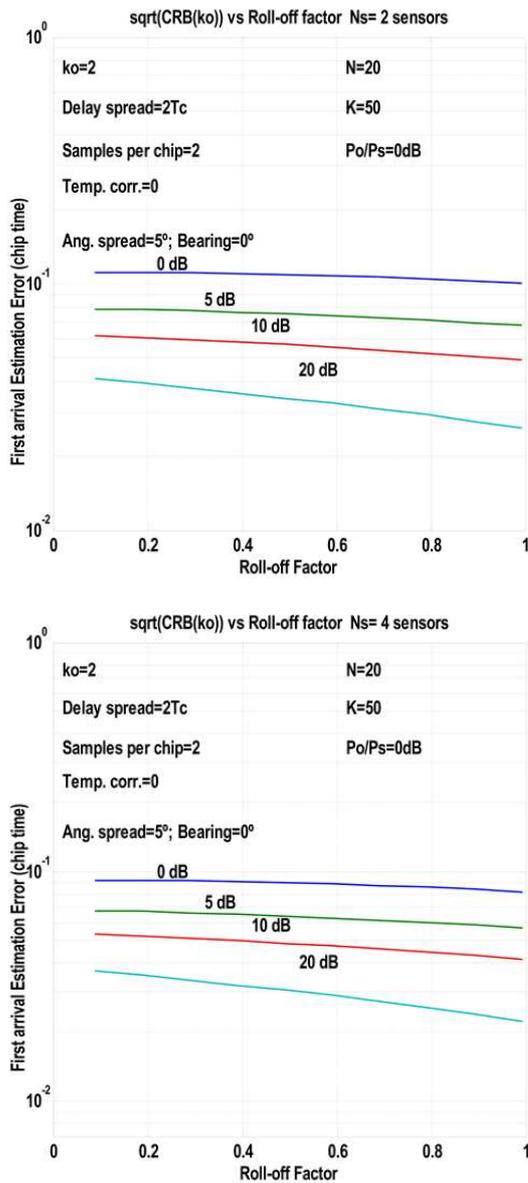


Figura 4: CRB del TOA en función del factor de roll-off y la relación señal a ruido de la componente dispersa (SNR) para el caso en que el nivel de potencia de la componente LOS es igual al nivel de potencia de la señal dispersa y una fuente ICD ( $\alpha=0$ ). Número de estimaciones del vector de canal colocado en 50, tasa de muestreo igual a dos veces la tasa de chip, coeficiente de dispersión temporal igual a  $2 T_c$ , dispersión angular de  $5^\circ$  y señal llegando frontalmente. a) Superior: Dos sensores; b) Inferior: Cuatro sensores.

a  $9.0 \times 10^{-2}$  para una fuente FCD ( $\alpha = 0,99999$ ). Estos valores son algo mayores que los esperados para el caso NLOS, pero están bien acotados cuando se incrementa la SNR. En este caso el mínimo error está acotado por  $1.2 \times 10^{-2}$ .

**Resultado 2:** Comportamiento de la Cota de Error en la estimación del instante de llegada con la dirección de llegada de la emisión, los niveles de potencia de la componente LOS, el factor de correlación temporal entre las estimaciones del vector de canal y el número de sensores.

La Figura 3 muestra el comportamiento de las cotas de error en el instante de llegada de la componente LOS en relación con la dirección media de llegada de la señal recibida para diferentes valores de la potencia de la componente LOS cuando la relación señal a ruido de la componente dispersa es igual a 10 dB. Es interesante notar que el error en la estimación del TOA alcanza un mínimo para un valor cercano a  $30^\circ$ , y que esta mejora es más importante para niveles mayores de la componente LOS. Por ejemplo, la cotas de error pasan de alrededor de  $3.0 \times 10^{-2} T_c$  a  $1.1 \times 10^{-2} T_c$  cuando la potencia de la componente LOS es igual a la potencia de la señal dispersa y la dirección de llegada cambia de  $0^\circ$  a  $30^\circ$ , mientras que el error se reduce de alrededor de  $x10^{-2} T_c$  a  $3.5 \times 10^{-3} T_c$  cuando la potencia de la componente LOS es 10dB mayor que la potencia de la componente dispersa, y la dirección de llegada cambia de  $0^\circ$  a  $30^\circ$  y se utilizan dos sensores. Por otro lado se observa que una mejora importante es posible cuando se utilizan cuatro sensores en lugar de cuatro especialmente para una fuente altamente correlada temporalmente ( $\alpha = 0,99$ ). En efecto, para el caso de cuatro sensores y potencia LOS de 10dB sobre la dispersa, y DOA de  $30^\circ$ , la cota se reduce a aproximadamente  $1.5 \times 10^{-3} T_c$ , es decir aproximadamente la mitad de su análogo con dos sensores. Todos estos valores conducirán idealmente a incertidumbres en la estimación de la posición de un suscriptor móvil menores a 1 metro.

**Resultado 3:** Comportamiento de la Cota de Error en la estimación del instante de llegada con el factor de roll-off, la relación señal a ruido de la componente dispersa (SNR), y el número de sensores en el caso de Propagación Rice.

La Figura 4 muestra el comportamiento del error en la estimación del instante de llegada de la componente LOS como una función del factor de roll-off del pulso conformador cuando se utiliza un arreglo conformado por múltiples sensores.

La Figura 4 muestra como la cota de error en la estimación del instante de llegada de la componente LOS decrece para valores altos del factor de roll-off cuando la señal llega frontalmente al arreglo, especialmente para altos valores de la relación SNR. Por ejemplo, la cota de error reduce desde  $3 \times 10^{-2} T_c$  para  $\beta=0,5$  hasta alrededor de  $2 \times 10^{-2} T_c$  para  $\beta=1$ , cuando se usan cuatro sensores y para una SNR de 20dB para la componente dispersa. Nuevamente puede observarse también que mejores resultados se obtienen cuando se utiliza un número mayor de sensores.

### Conclusiones

Se ha desarrollado un análisis comparativo de los efectos sobre la incertidumbre en la estimación de la componente LOS de un sistema DS-SS para una señal afectada por propagación multitrayecto y dispersa temporalmente y espacialmente. Los resultados se han calculado asumiendo dos muestras por chip y varios factores de

roll-off. Se trata de un modelo de canal Rice que complementa la información obtenida en condición NLOS y propagación Rayleigh [8].

El modelo muestra un potencial incremento en la certidumbre en la estimación del instante de llegada de la componente LOS conforme se incrementa la relación señal a ruido de la componente LOS respecto de la componente dispersa y de la potencia de la señal respecto del ruido. Es particularmente interesante notar que la certidumbre se incrementa en este caso cuando se trata de una fuente con una alta correlación temporal, lo cual es lo opuesto a lo que acontece en el caso de propagación Rayleigh. El modelo muestra también cierta ganancia en función de la dirección de apuntamiento de la antena, posiblemente asociado al manejo de la diversidad espacial en el arreglo. Finalmente, se verifica una ligera ganancia en relación al roll-off utilizado; sin embargo su efecto es más notorio para relaciones de señal a ruido más elevadas y definitivamente no tiene un efecto deficiente en el grado de incertidumbre de la señal.

### Referencias

- [1] El Natour Al Bitar H. et al. 2006. "Analysis of the GPS acquisition environments: indoors and outdoors". *Information and Communication Technologies, ICTTA*.
- [2] Chao-Min Su et al. 2010. "Sensor-Aided Personal Navigation Systems for Handheld Devices". *39<sup>th</sup> International Conference on Parallel Processing Workshops*.
- [3] Baniukevic, A. et al. 2011. "Improving Wi-Fi Based Indoor Positioning Using Bluetooth Add-Ons". *39<sup>th</sup> International Conference on Parallel Processing Workshops*.
- [4] Filonenko, V., Cullen, C., and Carswell, J. 2010. "Investigating Ultrasonic Positioning on Mobile Phones". *International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*.
- [5] Schelkshorn, S. and Detlefsen, J. 2008. "Position Finding based on Multiple Doppler Sensors". *Proceedings of the 5<sup>th</sup> European Radar Conference*.
- [6] Urruela, A. and Sala, J. 2006 "Average Performance Analysis of Circular and Hyperbolic Geolocation". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. AES-20.
- [7] Torrieri, D. 1984 "Statistical theory of passive location systems". *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 55, 1, 52–66.
- [8] Játiva, R. and Vidal, J. 2009. "Estimación del Tiempo de Llegada en un Canal Rayleigh desde una perspectiva de la Cota Inferior de Cramer-Rao". *Revista AVANCES EN CIENCIAS E INGENIERÍAS*. 1, 5–10
- [9] Játiva, R. and Vidal, J. 2003. "La cota Inferior de Cramer-Rao en la Estimación del Instante de Llegada al usar Modelos de Fuente Distribuida". *Revista CIENCIA*. 6, 185–196.
- [10] Arias, M., and Mandersson, B. 2007. "Time Domain Cluster PDF and its application in Geometry Based Statistical Channel Models". *The 18th Annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'07)*.
- [11] Oestges, C. et al 2005. "Impact of Fading Correlations on MIMO Communication Systems in Geometry-Based Statistical Channel Models". *IEEE Transactions on Wireless Communications*. 4, 3, 1112–1120.
- [12] Qi Yao, Yi Yuan, et al 2012. "Comparison of the Statistical Properties of the LTE-A and IMT-A Channel Models". *IEEE Wireless Communications and Networking Conference: PHY and Fundamentals*.
- [13] Raich, R., Goldberg, J. and Messer, H. 2000. "Bearing Estimation for a Distributed Source: Modeling, Inherent Accuracy Limitations and Algorithms". *IEEE Transactions on Signal Processing*. 48, 2, 429–441 .
- [14] Pedersen, K. 2000. "Antenna Arrays in Mobile Communications – Channel Modeling and Receiver Design for DS-CDMA Systems". *Tesis Doctoral de la Universidad de Aalborg*.