

Agujeros de gusano y potenciales efectivos

Carlos A. Marín*

*Colegio de Ciencias e Ingeniería - El Politécnico, Universidad San Francisco de Quito
Diego de Robles y Vía Interoceánica, Quito, Ecuador*

*Autor principal/Corresponding author, e-mail: cmarin@usfq.edu.ec

Editado por/Edited by: C. Montúfar, PhD.

Recibido/Received: 04/11/2011. Aceptado/Accepted: 04/15/2011.

Publicado en línea/Published on Web: 06/30/2011. Impreso/Printed: 06/30/2011.

Abstract

The fundamental properties of the Ellis wormholes are reviewed. Using the Hamilton-Jacobi formalism, we have derived the effective potentials and the orbit equation for a particle around a wormhole in both Ellis and Morris-Thorne geometries. Finally, we apply the equation obtained in the Morris-Thorne case for a Schwarzschild wormhole.

Keywords. Wormhole, Ellis, general relativity, hyperspace, Einstein, orbits.

Resumen

Se revisan las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano con la geometría de Ellis. Utilizando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi deducimos los potenciales efectivos, así como la ecuación de la órbita descrita por una partícula alrededor de un agujero de gusano tanto en la geometría de Ellis como en la de Morris-Thorne. Finalmente aplicamos la ecuación obtenida en la geometría de Morris-Thorne para un agujero de gusano del tipo de Schwarzschild.

Palabras Clave. Agujeros de gusano, Ellis, relatividad general, hiperespacio, Einstein, órbitas.

Introducción

Un agujero de gusano (*wormhole*) es un túnel en el hiperespacio que conecta dos puntos en dos regiones asintóticamente planas en el espacio-tiempo [1, 2] (el hiperespacio es un espacio plano hipotético con más de tres dimensiones espaciales, en el que está contenido el espacio curvo de nuestro universo). Los agujeros de gusano podrían también conectar universos paralelos y eventualmente proporcionarían la posibilidad de viajar en el tiempo.

El wormhole tiene dos entradas llamadas "bocas". Las bocas están conectadas por un túnel a través del hiperespacio que puede ser muy corto (digamos unos pocos kilómetros de largo). Las bocas de un agujero de gusano "se parecen" al horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild [2, 3, 4, 5, 6], con una diferencia importante: el horizonte de sucesos de un agujero negro es, si despreciamos los efectos cuánticos, una superficie de una sola vía; cualquier cosa puede entrar en el agujero, sin embargo nada puede escapar. Por el contrario, las bocas de un wormhole son superficies que pueden ser cruzadas en ambas direcciones, hacia adentro del agu-

jero de gusano y de regreso hacia el "universo externo" (nuestro universo).

Los wormholes fueron descubiertos matemáticamente como una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en 1935, en un artículo de Albert Einstein y Nathan Rosen publicado en la revista *Physical Review*, en el que trataban de hallar una conexión (un puente) entre los agujeros negros y los agujeros blancos [7]. En 1957 el grupo de investigación dirigido por John Archibald Wheeler y Tullio Regge desarrolló una serie de métodos perturbativos para analizar pequeñas perturbaciones en los agujeros de gusano y los agujeros negros. Luego, durante 30 años, los agujeros de gusano pasaron casi al olvido. Su estudio se reavivó con un artículo publicado por Kip S. Thorne y Mike Morris en el *American Journal of Physics* del año 1988 [8]. El artículo fue inspirado por una novela (*Contacto*) [9] que el astrofísico y exobiólogo Carl Sagan estaba escribiendo por aquella época, y para cuya culminación había pedido asesoramiento técnico a Kip Thorne (en lo referente a la física gravitacional).

De acuerdo con las ecuaciones de campo de Einstein, el tiempo de vida de un wormhole es en promedio muy pequeño, por lo que nada en absoluto (persona, radiaciones, señal de cualquier clase) puede viajar a través del túnel del agujero de gusano. La única manera de mantener abierto el agujero por un tiempo mucho mayor es mediante la presencia de algún tipo de material "exótico", a lo largo del wormhole, que empuje sus paredes gravitacionalmente, manteniéndolas separadas. Para ello, se necesita una región del espacio-tiempo con curvatura negativa, similar a la superficie de una silla de montar. Al material se le denomina "exótico", porque como Kip Thorne demostrara en 1985, debe tener una densidad de energía promedio negativa, con respecto a un haz de luz viajando a través del agujero de gusano. El material "exótico" repele gravitacionalmente los rayos de luz por lo que los haces luminosos se desenfocan, como se ilustra en la figura a continuación.

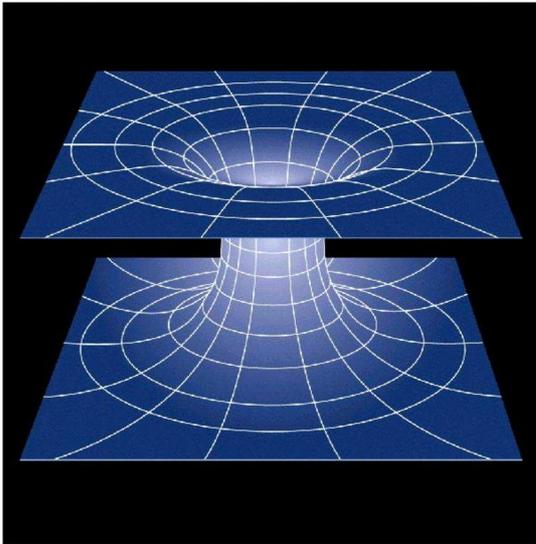


Figura 1: Agujero de gusano.

El que la densidad de energía promedio sea negativa no implica que el material exótico tenga una energía negativa con respecto a un observador en reposo en el interior del agujero de gusano. El concepto de densidad de energía es relativo al sistema de referencia utilizado; en un sistema de referencia, la densidad puede ser positiva, y en otro, negativa.

Nadie sabe exactamente de qué puede estar hecho el material exótico. Robert Wald [1] ha probado recientemente, que en un espacio-tiempo curvo, bajo una amplia variedad de circunstancias, la curvatura distorsiona las fluctuaciones del vacío de carácter gravitacional convirtiéndolas en exóticas debido a que su densidad de energía promedio se hace negativa. Dichas fluctuaciones del vacío son análogas a las fluctuaciones del vacío de naturaleza electromagnética. Son fluctuaciones aleatorias en la curvatura del espacio causadas porque re-

giones del mismo están continuamente tomando energía de regiones adyacentes, para luego devolverla. Bajo circunstancias ordinarias las fluctuaciones son tan pequeñas que ningún científico las ha podido detectar hasta ahora. Otra posibilidad es que el material exótico esté formado por energía oscura que, como sabemos, tiene densidad de energía negativa y es el 74 % de la energía del universo.

En el presente documento continuamos con el análisis iniciado en el artículo "Agujeros de gusano: solución exponencial" [10]. En primer lugar, revisaremos las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano con geometría de Ellis [11] (ver también [8]) y, posteriormente, utilizando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, calcularemos los potenciales efectivos, así como la ecuación de la órbita descrita por una partícula alrededor de un agujero de gusano, tanto en la geometría de Ellis como en la de Morris-Thorne.

1 Métricas

En el artículo de Morris y Thorne se consideran dos métricas:

i)

$$(ds)^2 = e^{2\Phi} c^2 (dt)^2 - f(r) (dr)^2 - r^2 (d\Omega)^2 \quad (1)$$

donde s representa el elemento de arco. r , θ y φ son las coordenadas esféricas de un punto y t es el tiempo coordenado medido por un observador remoto en reposo.

$$(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \text{ y } f(r) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}.$$

A $b(r)$ se le denomina función de forma del agujero de gusano, y determina la forma espacial del mismo. La función $\Phi = \Phi(r)$ se denomina función de corrimiento hacia el rojo.

ii)

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dl)^2 - (l^2 + b_0^2) (d\Omega)^2 \quad (2)$$

donde $-\infty < l < \infty$ es la distancia propia medida de dirección radial, b_0 es una constante (ver sección 8) y t es el tiempo coordenado.

La geometría determinada por la métrica i), ha sido estudiada en detalle en las referencias [8], [10]. La geometría determinada por la métrica ii) se denomina "geometría de Ellis". A continuación, procederemos a analizar las propiedades fundamentales de dicha métrica.

2 Símbolos de Christoffel y Tensor de Riemann-Christoffel

Para la métrica (2), el cuadrado del elemento de arco $(ds)^2$ se puede escribir:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3)$$

$$\text{donde } g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l^2 + b_0^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(l^2 + b_0^2) \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

El tensor contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(l^2 + b_0^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -((l^2 + b_0^2) \sin^2 \theta)^{-1} \end{bmatrix}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie son:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \quad (4)$$

donde x^{μ} es el cuadrivector posición de la partícula. Las letras griegas como: μ, σ, ρ , etc. toman los valores 0, 1, 2 y 3. Hemos adoptado la convención de suma de Einstein en la que se suma sobre índices que se repiten dos veces.

En coordenadas esféricas $x^0 = ct$, $x^1 = l$, $x^2 = \theta$ y $x^3 = \varphi$.

Dichos símbolos se pueden calcular fácilmente usando el teorema:

Si $g_{\mu\nu} \neq 0$ para $\mu \neq \nu$

a) $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \forall \mu \neq \nu \neq \rho$,

b) $\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}$ para μ fijo,

c) $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}}$ para $\mu \neq \nu$ fijos,

d) $\Gamma_{\nu\nu}^{\mu} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^{\mu}}$ para $\mu \neq \nu$ fijos,

El resultado es que los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son:

$$\Gamma_{22}^1 = -l \quad (5)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -l \sin^2 \theta \quad (6)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\left(\frac{1}{2}\right) \sin(2\theta) \quad (7)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{l}{(l^2 + b_0^2)} \quad (8)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{l}{(l^2 + b_0^2)} \quad (9)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \quad (10)$$

El tensor de Riemann-Christoffel está dado por la expresión:

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}) + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} \quad (11)$$

Las 24 componentes de dicho tensor diferentes de cero son:

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)} \quad (12)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = -\frac{b_0^2 \sin^2 \theta}{(l^2 + b_0^2)} \quad (13)$$

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = \frac{b_0^2 \sin^2 \theta}{(l^2 + b_0^2)} \quad (14)$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (15)$$

$$R_{131}^3 = -R_{113}^3 = -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (16)$$

$$R_{232}^3 = -R_{223}^3 = \frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)} \quad (17)$$

Para el cálculo de las componentes nulas, hemos usado propiedades tales como:

$$R_{\nu\rho\rho}^{\mu} = 0 \text{ para } \rho \text{ fijo} \quad (18)$$

$$R_{\mu\rho\sigma}^{\mu} = 0 \text{ para } \mu \text{ fijo y } g_{\mu\nu} \text{ diagonal, etc} \quad (19)$$

3 Marco de referencia propio

Consideremos dos sistemas de referencia, al uno lo llamaremos sistema de referencia no primado y al otro sistema primado. Sea $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ con $\alpha = 0, 1, 2$ y 3 la base de vectores asociada al sistema de referencia no primado, y $\{\vec{e}_{\alpha}'\}$ la base de vectores asociada al sistema primado ($\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\alpha}'$, son vectores en el espacio-tiempo, es decir, tienen cuatro componentes). Un vector \vec{A} en el espacio tiempo se puede escribir:

$$\vec{A} = A^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \text{ en la base } \{\vec{e}_{\alpha}\},$$

$$\vec{A} = A'^{\mu} \vec{e}_{\mu}' \text{ en la base } \{\vec{e}_{\mu}'\}$$

de manera que $A^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = A'^{\mu} \vec{e}_{\mu}'$. Si $A'^{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} A^{\alpha}$, entonces podemos escribir:

$$A^{\alpha} (\Lambda_{\alpha}^{\mu} \vec{e}_{\mu}' - \vec{e}_{\alpha}) = \vec{0}$$

ya que A^{α} representan las componentes de un vector arbitrario, tenemos:

$$\vec{e}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \vec{e}_{\mu}' \quad (20)$$

y también, si Λ es una matriz invertible:

$$\vec{e}_{\mu}' = (\Lambda^{-1})_{\mu}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \quad (21)$$

Sea $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ la base ortogonal de vectores asociada con las coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = l$, $x^2 = \theta$ y $x^3 = \varphi$. Introduzcamos una base ortonormal de vectores $\{\vec{e}_{\mu}'\}$ definidos por:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_0 \\ \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l^2 + b_0^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (l^2 + b_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Es fácil demostrar que

$$g'_{\alpha\beta} \equiv \vec{e}'_{\alpha} \cdot \vec{e}'_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diagonal}(1, -1, -1, -1) \quad (23)$$

Esta base nos permite introducir un nuevo sistema de coordenadas del marco de referencia propio "proper reference frame":

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \quad (24)$$

o:

$$x'^0 = x^0 \quad (33a)$$

$$x'^1 = x^1 \quad (33b)$$

$$x'^2 = (l^2 + b_0^2) x^2 \quad (33c)$$

$$x'^3 = (l^2 + b_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta x^3 \quad (33d)$$

Estas son las coordenadas de un conjunto de observadores que siempre permanecen en reposo en el campo gravitacional del agujero de gusano. Es decir que tienen:

$$l, \theta \text{ y } \varphi \text{ constantes}$$

En esta nueva base, las componentes del tensor de Riemann-Christoffel se pueden calcular a partir de la relación:

$$R'^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha_3}}{\partial x'^{\sigma}} \times \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} R^{\beta}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad (25)$$

El resultado es que las componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} R'^1_{212} &= -R'^1_{221} \\ &= R'^1_{313} = -R'^1_{331} \\ &= -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} R'^2_{121} &= -R'^2_{112} \\ &= R'^3_{131} = -R'^3_{113} \\ &= -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R'^2_{323} &= -R'^2_{332} \\ &= R'^3_{232} = -R'^3_{223} \\ &= \frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

4 Tensor y escalar de Ricci

El tensor de Ricci se define por la expresión

$$R'_{\mu\nu} \equiv R'^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (29)$$

La componente no nula de dicho tensor es:

$$R'_{11} = -\frac{2b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (30)$$

El escalar de Ricci es:

$$R' = g'^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = R'_{00} - R'_{11} - R'_{22} - R'_{33} \quad (31)$$

Introduciendo (30) en (31) tenemos:

$$R' = \frac{2b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (32)$$

5 Tensor de Einstein

Las componentes no nulas del tensor de Einstein [3, 4, 5, 6]

$$G'_{\mu\nu} = R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R' g'_{\mu\nu}$$

son:

$$G'_{00} = G'_{11} = -G'_{22} = -G'_{33} = -\frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (33)$$

6 Ecuaciones de Campo de Einstein y tensor energía-momentum

De acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein [3, 4, 5, 6]

$$G'_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T'_{\mu\nu} \quad (34)$$

los tensores de Einstein $G'_{\mu\nu}$ y de energía-momentum $T'_{\mu\nu}$, son proporcionales. Ello implica que las únicas componentes no nulas de $T'_{\mu\nu}$ son T'_{00} , T'_{11} y $T'_{22} = T'_{33}$, donde:

$$T'_{00} = \rho'(l) c^2 \quad (35)$$

$$T'_{11} = -\tau(l) \quad (36)$$

$$T'_{22} = T'_{33} = P(l) \quad (37)$$

Donde $\rho'(l)$ es la densidad de total de masa-energía medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano, $\tau(l)$ es la tensión por unidad de área medida por dichos observadores en la dirección radial (es el negativo de la presión radial), y $P(l)$ es la presión medida en las direcciones laterales (ortogonales a la dirección radial). En un fluido perfecto $P(l) = -\tau(l)$.

A partir de (34) podemos escribir:

$$G'_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T'_{00}$$

usando las ecuaciones (33) y (35), podemos demostrar que:

$$\rho' c^2 = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} < 0 \quad (38)$$

La ecuación (34) para $\mu = \nu = 1, 2, 3$ da:

$$\begin{aligned} \rho' c^2 &= -\tau(l) = -P(l) \\ &= -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \end{aligned} \quad (39)$$

de manera que la densidad total de masa-energía medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano es negativa.

7 Ausencia de un horizonte de sucesos

Matemáticamente, los horizontes de sucesos, en un espacio descrito por una métrica estática y asintóticamente plana, se obtienen haciendo $g_{00} \rightarrow 0$. Para nuestra métrica (2) tendríamos:

$$g_{00} = 1 \neq 0 \quad (40)$$

de manera que la condición fundamental de que el agujero de gusano no deba tener ningún horizonte de sucesos se cumple.

8 Superficies de inserción (embedding surfaces)

Para un tiempo fijo t y tomando $\theta = \pi/2$ (plano ecuatorial), la parte espacial de la métrica (2) se puede escribir:

$$(ds')^2 = -(ds)^2 = (dl)^2 + (l^2 + b_0^2) (d\varphi)^2 \quad (41)$$

que representa un elemento de arco en el plano ecuatorial. Con la transformación de coordenadas

$$r^2 = l^2 + b_0^2 \quad (42)$$

o

$$l = \pm (r^2 - b_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

tenemos que

$$(dl)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^2} \quad (43)$$

Reemplazando la última expresión en la ecuación (41) se obtiene

$$(ds')^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^2} + r^2 (d\varphi)^2 \quad (44)$$

Deseamos construir en el espacio Euclideo tridimensional, una superficie bidimensional que tenga la misma geometría que la del elemento de arco descrito por (41). Entonces, uno podría encajar la geometría del espacio curvo bidimensional en la geometría plana de un espacio Euclideo tridimensional [12]. En dicho espacio Euclideo, introduciremos coordenadas cilíndricas z, r y φ . La métrica Euclidea del espacio de inserción (embedding space) es:

$$(ds_{Euclidean})^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (45)$$

En (45), nosotros suponemos que $z = z(r)$ (consideramos que la superficie insertada tiene simetría axial).

Si nosotros identificamos las coordenadas (r, φ) del espacio Euclideo con las coordenadas (r, φ) del espacio-tiempo del agujero de gusano, el elemento de arco (45) será el mismo que el descrito por la ecuación (44) a través del wormhole. Podemos entonces escribir:

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^2} \quad (46)$$

de donde obtenemos:

$$z(r) = \pm b_0 \int_{b_0}^r \frac{dr}{(r^2 - b_0^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (47)$$

el valor de la integral es:

$$z(r) = \pm b_0 \ln \left[\frac{r}{b_0} + \left[\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (48)$$

Todo agujero de gusano tiene un radio mínimo (para la presente métrica $r = b_0$) para el cual la superficie insertada del espacio curvo bidimensional es vertical. Es decir, para $r = b_0$,

$$\left(\frac{dz}{dr}\right) \Big|_{r=b_0} = \pm \infty \quad (49)$$

dicho radio define la garganta del agujero de gusano (ver Figura 2).

9 Aceleración de marea gravitacional

Consideremos un viajero a bordo de una sonda espacial que cae libremente y en dirección radial a través del agujero de gusano. La transformación entre las coordenadas del wormhole (x'^{ν}) y las coordenadas del marco de referencia del viajero en la sonda (x''^{μ}) es

$$x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (50)$$

donde

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

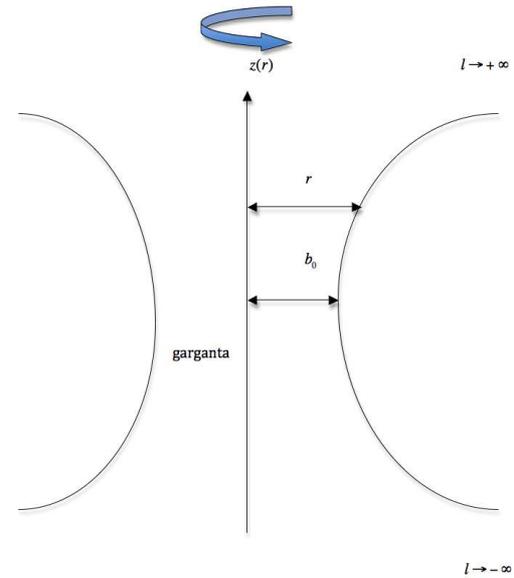


Figura 2: Diagrama de inserción para un agujero de gusano. En la garganta se cumple $r = b_0$; $l = 0$. Para generar el agujero de gusano, se debe rotar la curva de la figura alrededor del eje z .

donde $\beta = \frac{v}{c}$. Esta transformación nos permite introducir una base de vectores para el marco de referencia del viajero:

$$\vec{e}''_{\alpha} = (\Lambda'^{-1})^{\beta}_{\alpha} \vec{e}'_{\beta} \quad (51)$$

o

$$\vec{e}''_0 = \gamma \vec{e}'_0 \mp \gamma\beta \vec{e}'_1 \quad (52)$$

$$\vec{e}''_1 = \mp \gamma\beta \vec{e}'_0 + \gamma \vec{e}'_1 \quad (53)$$

$$\vec{e}''_2 = \vec{e}'_2 \quad (54)$$

$$\vec{e}''_3 = \vec{e}'_3 \quad (55)$$

estos vectores satisfacen:

$$\vec{e}''_{\alpha} \cdot \vec{e}''_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (56)$$

por lo que constituyen una base ortonormal de vectores.

Sea $\vec{\xi}$ el cuadvivector separación entre dos partes del cuerpo del viajero (por ejemplo, la rodilla y la cabeza) en caída libre a través del agujero de gusano. En el marco de referencia del viajero, $\vec{\xi}$ es puramente espacial ($\xi''^0 = 0$).

La aceleración de marea gravitacional está dada por la ecuación de desviación de la geodésica [2, 3, 4, 5, 6], que en la base $\{\vec{e}''_{\alpha}\}$ es :

$$\Delta a''^{\nu} = \frac{\delta^2 \xi''^{\nu}}{\delta \tau_T^2} = -R''^{\nu}_{\beta\gamma\mu} \xi''^{\gamma} u''^{\beta} u''^{\mu},$$

y ya que $\vec{\xi}$ es puramente espacial, $\Delta a''^{\nu}$ también lo es. Por ello, podemos escribir:

$$\Delta a''^i = \frac{\delta^2 \xi''^i}{\delta \tau_T^2} = -c^2 R''^i_{0j0} \xi''^j \quad (57)$$

Finalmente, como $R''^i_{0j0} = -R''^i_{i0j0}$, tenemos:

$$\Delta a''^i = c^2 R''^i_{i0j0} \xi''^j \quad (58)$$

donde los R''^i_{i0j0} se pueden calcular a partir de la relación:

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x''^{\nu}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x''^{\rho}} \times \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x''^{\sigma}} R'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (59)$$

usando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x''^0 \mp \gamma \beta x''^1, \\ x'^1 &= \mp \gamma \beta x''^0 + \gamma x''^1, \\ x'^2 &= x''^2; \quad x'^3 = x''^3 \end{aligned}$$

obtenidas a partir de la expresión (50). El resultado es:

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma} = R''^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\gamma^2 \beta^2 b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \quad (60)$$

Las otras componentes R''^i_{i0j0} son todas iguales a cero.

Por lo tanto, las componentes de la aceleración son:

$$\Delta a''^1 = 0 \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \Delta a''^2 &= c^2 R''^{\mu\nu\rho\sigma} \xi''^2 \\ &= \frac{\gamma^2 v^2 b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \xi''^2 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \Delta a''^3 &= c^2 R''^{\mu\nu\rho\sigma} \xi''^3 \\ &= \frac{\gamma^2 v^2 b_0^2}{(l^2 + b_0^2)^2} \xi''^3 \end{aligned} \quad (63)$$

En el límite cuando la rapidez del viajero se aproxima a cero ($v \rightarrow 0$), las componentes de la aceleración se anulan ($\Delta a''^i \rightarrow 0$ $i = 1, 2, 3$). Por lo tanto, si el viajero cae lentamente hacia el agujero de gusano, sentirá una fuerza de marea gravitacional arbitrariamente pequeña.

10 Partícula de prueba cayendo a lo largo de una trayectoria radial

Imaginemos una partícula de prueba de masa en reposo m_0 cayendo a lo largo de una trayectoria radial en el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \text{constante}$) El cuadrivector momentum de la partícula es

$$P'^{\mu} = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 v, 0, 0) \quad (64)$$

El cuadrivector momentum satisface la ecuación:

$$m_0 \frac{dP'^{\rho}}{d\tau} + \Gamma'_{\mu\nu} P'^{\mu} P'^{\nu} = 0 \quad (65)$$

donde τ es el tiempo propio y

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x''^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x''^{\gamma}} \Gamma'_{\alpha\beta\gamma} \\ &+ \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu} \partial x''^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x''^{\alpha}} \end{aligned} \quad (66)$$

Debido a que la transformación entre las coordenadas x^{α} y x'^{α} es lineal, entonces $\left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu} \partial x''^{\nu}}\right) = 0$, y ya que

$$\Gamma'^1_{00} = \Gamma'^1_{01} = \Gamma'^1_{11} = 0, \quad (67)$$

la ecuación (65) para $\rho = 1$ nos da

$$m_0 \frac{dP'^1}{d\tau} = 0 \quad (68)$$

de donde obtenemos

$$P'^1 = \gamma m_0 v = \text{constante} \quad (69)$$

de manera que la rapidez de la partícula (v) es constante.

Por otro lado ya que

$$v(l) = \mp c \frac{dx'^1}{dx'^0} = \mp c \frac{dx'^1}{dx'^0} = \mp \frac{dl}{dt} \quad (70)$$

obtenemos que $l = \mp vt$. La partícula entonces se moverá a lo largo de la línea de universo $l = \mp vt$, $\theta = \text{constante}$, $\varphi = \text{constante}$ con $v = \text{constante} < c$.

11 Potencial efectivo de un fotón en un agujero de gusano del tipo Ellis

Considerémos la métrica de Ellis ii). Con la substitución $r^2 = l^2 + b_0^2$, dicha métrica se escribe

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^2\right)} - r^2 (d\Omega)^2 \quad (71)$$

donde $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$. Llamando

$$\gamma^*(r) = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^2\right)} \quad (72)$$

entonces podemos escribir

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

El tensor contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^{*-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(r^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -((r^2) \sin^2 \theta)^{-1} \end{bmatrix}$$

La ecuación de Hamilton Jacobi para una partícula de masa m_0 es

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) - m_0^2 = 0, \quad (73)$$

que para la métrica de Ellis con la sustitución dada arriba se puede escribir (tomaremos $c = 1$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\gamma^*)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \\ - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - m_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

En el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$), tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\gamma^*)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \\ - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - m_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Hallemos una solución de la forma

$$S = S_0(r) + L\varphi - Et \quad (76)$$

en donde E representa la energía y L el momentum angular. La ecuación (75) se escribe entonces

$$E^2 - (\gamma^*)^{-1} \left(\frac{dS_0}{dr} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 = 0 \quad (77)$$

de donde obtenemos:

$$S_0(r) = \int (\gamma^*)^{\frac{1}{2}} \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} dr \quad (78)$$

La trayectoria de la partícula se determina por la ecuación [13]

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \text{constante} = 0 \quad (79)$$

que es equivalente a escribir

$$\frac{\partial S_0}{\partial L} + \phi = 0 \quad (80)$$

De la última ecuación y derivando en (78) S_0 con respecto a L obtenemos

$$\varphi = L \int \frac{(\gamma^*)^{\frac{1}{2}} dr}{r^2 \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (81)$$

Adicionalmente,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{constante} = 0, \quad (82)$$

implica que

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} - t = 0 \quad (83)$$

de manera que:

$$t = E \int \frac{(\gamma^*)^{\frac{1}{2}} dr}{\left(E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (84)$$

También podemos escribir

$$(\gamma^*)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{E} \left[E^2 - \left(m_0^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (85)$$

En (85), nosotros podemos identificar $\left(m_0^2 + \frac{L^2}{r^2} \right)$ como un potencial efectivo

$$V_{eff}^2 = m_0^2 + \frac{L^2}{r^2}. \quad (86)$$

Para fotones (null geodesics) $m_0 = 0$, y simplemente escribiremos (en términos de l y b_0)

$$V_P = \frac{L^2}{(l^2 + b_0^2)} \quad (87)$$

expresión que coincide con la ecuación obtenida en [14]. V_P es entonces una especie de potencial efectivo para los rayos de luz. El valor máximo de V_P es $V_{Pmax} = \left(\frac{L}{b_0} \right)^2$.

12 Órbita de una partícula alrededor de un agujero de gusano con geometría de Ellis

De la ecuación (81) tenemos que:

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) = L (\gamma^*)^{\frac{1}{2}} \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (88)$$

ahora, $r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dr} \right)$, de manera que usando (85) y (88) fácilmente podemos demostrar que

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{E}. \quad (89)$$

La energía E se puede escribir en términos del tiempo propio τ como $E = m_0 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)$, y como $\left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)$, entonces tenemos que

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \frac{L}{m_0} = J \quad (90)$$

donde J es el momentum angular por unidad de masa.

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, tenemos que

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right) = \left(\frac{du}{dr} \right) \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right), \quad (91)$$

y si definimos $\epsilon = \frac{E}{m_0}$, obtenemos (usando la ecuación (88))

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{J^2 \gamma^* \left(\frac{1}{u} \right)} (\epsilon^2 - J^2 u^2 - 1). \quad (92)$$

Derivando la última relación con respecto a φ , obtenemos finalmente la ecuación de la órbita de la partícula

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{u}{\gamma^* \left(\frac{1}{u} \right)} = \frac{b_0^2 u (\epsilon^2 - (1 + J^2 u^2))}{J^2} \quad (93)$$

donde $\gamma^* \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{1}{(1 - (b_0 u)^2)}$.

13 Potencial efectivo de una partícula en la geometría de Morris-Thorne

Consideremos nuevamente la geometría de Morris-Thorne descrita por la métrica (1). El tensor métrico es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

mientras que el tensor contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(f(r))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{bmatrix}$$

La ecuación de Hamilton Jacobi (73) para esta métrica es:

$$e^{-2\Phi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - m_0^2 = 0 \quad (94)$$

En el plano ecuatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$), podemos escribir

$$e^{-2\Phi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - m_0^2 = 0 \quad (95)$$

Halleemos una solución de la forma

$$S = S_0(r) + L\varphi - Et \quad (96)$$

Reemplazando en la ecuación (95) tenemos

$$e^{-2\Phi} E^2 - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dS_0}{dr} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 = 0, \quad (97)$$

de donde

$$S_0(r) = \int (f(r))^{\frac{1}{2}} \left[e^{-2\Phi} E^2 - \frac{L^2}{r^2} - m_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr \quad (98)$$

A partir de las condiciones $\frac{\partial S}{\partial L} = \text{constante} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial E} = \text{constante} = 0$, obtenemos

$$\varphi = \int \left(\frac{L}{r^2} \right) (f(r))^{\frac{1}{2}} e^{\Phi} \quad (99)$$

$$\times \left[E^2 - e^{2\Phi} \left(\frac{L^2}{r^2} + m_0^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

y

$$t = \frac{E}{m_0} \int (f(r))^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi} \quad (100)$$

$$\times \left[\left(\frac{E}{m_0} \right)^2 - e^{2\Phi} \left(\frac{L^2}{m_0^2 r^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

también podemos escribir

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e^{\Phi}}{E (f(r))^{\frac{1}{2}}} [E^2 - V_{eff}^2(r)]^{\frac{1}{2}} \quad (101)$$

donde

$$V_{eff}(r) = m_0 e^{\Phi} \left(\frac{L^2}{m_0^2 r^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (102)$$

es el potencial efectivo para una partícula de masa m_0 alrededor de un agujero de gusano con la geometría de Morris-Thorne.

14 Ecuación de la órbita en la geometría de Morris-Thorne

En esta sección calcularemos la ecuación de la órbita descrita por una partícula alrededor de un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne. A partir de la ecuación (99) podemos escribir

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = L (f(r))^{\frac{1}{2}} [E^2 - V_{eff}^2(r)]^{-\frac{1}{2}} e^{\Phi} \quad (103)$$

Ya que $\frac{d\varphi}{dr} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dr} \right)$, usando (99) y (100) podemos demostrar que

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L e^{2\Phi}}{E}. \quad (104)$$

Adicionalmente como

$$E = e^{2\Phi} m_0 \left(\frac{dt}{d\tau} \right), \quad (105)$$

y, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$, entonces usando (104) y (105) obtenemos

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{m_0} = J \quad (106)$$

donde J es el momentum angular por unidad de masa. Con el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, llamando $\epsilon = \frac{E}{m_0}$ y ya que $\left(\frac{du}{d\varphi} \right) = \left(\frac{du}{dr} \right) \left(\frac{dr}{d\varphi} \right) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)$, entonces podemos escribir usando la ecuación (99)

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{J^2 f \left(\frac{1}{u} \right) e^{2\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}} \times \left[\epsilon^2 - e^{2\Phi \left(\frac{1}{u} \right)} (1 + J^2 u^2) \right]. \quad (107)$$

Derivando la última relación con respecto a φ , obtenemos la ecuación de la órbita

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{u}{f \left(\frac{1}{u} \right)} + \frac{(1 + J^2 u^2)}{J^2 f \left(\frac{1}{u} \right)} \left(\frac{d\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}{du} \right) + \frac{\left[\epsilon^2 - e^{2\Phi \left(\frac{1}{u} \right)} (1 + J^2 u^2) \right]}{2J^2 f^2 \left(\frac{1}{u} \right) e^{2\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}} \times \left[\left(\frac{df \left(\frac{1}{u} \right)}{du} \right) + 2f \left(\frac{1}{u} \right) \left(\frac{d\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}{du} \right) \right] = 0. \quad (108)$$

15 Agujero de gusano de Schwarzschild

La garganta del agujero de gusano, en este caso, está ubicada en $r = r_S$ (El radio de Schwarzschild) [8]. La función de forma es

$$b(r) = \text{constante} = r_S = 2GM \quad (109)$$

donde $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Newton}}{\text{kg}^2} \text{m}^2$ es la constante de gravitación universal y M es la masa del agujero. Entonces, $f(r) = \gamma^{-1} = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1}$, de manera que tenemos

$$f \left(\frac{1}{u} \right) = (1 - ur_S)^{-1}. \quad (110)$$

Por otro lado $e^{2\Phi} = \gamma$, implica que $\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)$, de manera que

$$\Phi \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{1}{2} \ln (1 - ur_S) \quad (111)$$

La derivada de f con respecto a u es

$$\frac{df \left(\frac{1}{u} \right)}{du} = r_S (1 - ur_S)^{-2}, \quad (112)$$

y la derivada de Φ es

$$\frac{d\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}{du} = -\frac{r_S}{2} (1 - ur_S)^{-1}. \quad (113)$$

Usando estas dos últimas expresiones, vemos que

$$\frac{df \left(\frac{1}{u} \right)}{du} + 2f \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d\Phi \left(\frac{1}{u} \right)}{du} = 0. \quad (114)$$

Reemplazando la última ecuación en (108), obtenemos

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3GMu^2 \quad (115)$$

que es la bien conocida ecuación de la órbita para una partícula en un campo estático con simetría esférica [3]. Es interesante notar que en la geometría de Schwarzschild, el parámetro de impacto es el cociente entre el momentum angular y la energía, $b_{\text{impacto}} = \frac{L}{E}$ [15].

16 Conclusiones

Una de las más fascinantes predicciones de la Teoría General de la Relatividad (TGR) de Einstein es la posible existencia de túneles en el hiperespacio conectando dos regiones asintóticamente planas en el espacio-tiempo (agujeros de gusano). Ya que la mayoría de las predicciones de la TGR han sido verificadas experimentalmente, o mediante observaciones astronómicas, no sería difícil que en algún momento en el futuro se verifique también ésta última.

En este artículo, en primer lugar, hemos revisado las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano del tipo Ellis, siguiendo un camino parecido al del artículo previo (Agujeros de gusano: solución exponencial) [10]. Partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein y el tensor energía-momentum hemos calculado la densidad total de masa energía medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano. Dicha densidad es negativa. Este resultado es el mismo que aparece en el artículo de Morris-Thorne [8]. Hemos calculado también la aceleración de marea gravitacional experimentada por un viajero a bordo de una sonda espacial que cae libremente en dirección radial a través de un agujero de gusano, con la geometría de Ellis. En el límite, cuando la rapidez del viajero se aproxima a cero, las componentes de la aceleración se anulan, de manera que si el viajero cae lentamente hacia el agujero, sentirá una fuerza de marea gravitacional arbitrariamente pequeña. Adicionalmente, hemos calculado la línea de universo descrita por una partícula de prueba cayendo a lo largo de una trayectoria radial en el wormhole.

Usando el formalismo de Hamilton-Jacobi, hemos calculado el potencial efectivo y la ecuación de la órbita descrita por una partícula alrededor de un agujero de gusano, tanto en la geometría de Ellis como en la de

Morris-Thorne. En particular, se ha calculado el potencial efectivo de un fotón para la primera de las geometrías mencionadas. Finalmente, hemos verificado la ecuación de la órbita obtenida en la métrica de Morris-Thorne para un agujero de gusano de Schwarzschild. Sería sumamente interesante analizar la ecuación de la órbita que brinda la geometría de Morris-Thorne para el caso de la soluciones descritas en la referencia [8], así como para la solución exponencial descrita en la referencia [10].

Referencias

- [1] Thorne, K.S. 1994. "Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy." W. W. Norton & Company. New York, NY .
- [2] Kaku, M. 1994. "Hyperspace." Oxford University Press, Inc. New York, NY.
- [3] Kenyon, I. R. 1996. "General Relativity." Oxford University Press. Oxford , UK.
- [4] Schutz, B. F. 2005. "A first course in general relativity.", Cambridge University Press. Cambridge, UK.
- [5] Marín, C. 2009. "Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild." *Avances en Ciencias e Ingenierías*. 3(1), 79-90.
- [6] Marín, C. 2007. La Expansión del Universo, "Una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas", USFQ, Quito, Ecuador.
- [7] Einstein, A. ; Rosen, N. 1935. "The particle problem in the general theory of relativity" *Phys. Rev.* 48, 73-77.
- [8] Morris, M. S.; Thorne, K. S. 1988. "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity." *Am J. Phys.* 56(5), 395-412.
- [9] Sagan, C. 1985. "Contact.", Simon and Schuster. New York.
- [10] Marín, C. 2010. "Agujeros de gusano: solución exponencial." *Avances en Ciencias e Ingenierías*. 2(2), A36-A54.
- [11] Clément, G. 1989. "The Ellis geometry." *Am J. Phys.* 57(11), 967.
- [12] Misner, C. W.; Thorne, K.S. and Wheeler, J. A. 1973. "Gravitation." W. H. Freeman & Company. New York, NY.
- [13] Landau, L. D. ;Lifshitz, E.M. 1979. "Teoría Clásica de los Campos." Editorial Reverte.
- [14] Muller, T. 2004. "Visual appearance of a Morris-Thorne-Wormhole." *Am J. Phys.* 72(8), 1045-1050.
- [15] Blau, M. 2000. "Lecture Notes on General Relativity." ICTP. Trieste, Italy.