PROYECTIVIZACIÓN Y DIMENSIONES HOMOLÓGICAS

Juan Carlos Bustamante[*1] **François Huard**[2] **David Smith**[3]

1 Colegio de Ciencias e Ingeniería, USFQ
2 Department of Mathematics Bishop's University,
Sherbrooke, Québec-Canada.
3 Department of Mathematics Bishop's University,
Sherbrooke, Québec-Canada.

Resumen

Estudiamos propiedades homológicas del álgebra de endomorfismos $\mathsf{End}_\Lambda(P^\infty)^{op}$, donde Λ es un álgebra de artin de dimensión global infinita, y P^∞ es la suma directa de los representantes de la clases de isomorfismo de los Λ-módulos proyectivos indescomponibles tales que $P/\mathfrak{r}P$ tiene dimensión proyectiva infinita.

Palabras Clave. Dimensiones homológicas, dimensión finitística.

1 Introducción

Sea Λ un álgebra de artin y $\Lambda-\mathsf{mod}$ la categoría de $\Lambda-$módulos izquierdos finitamente generados. Dado un Λ-módulo proyectivo ${}_\Lambda P$, denotemos por $P-\mathsf{mod}$ la subcategoría plena de $\Lambda-\mathsf{mod}$ formada por los $\Lambda-$módulos ${}_\Lambda M$ que admiten presentaciones de la forma

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde $P_0,\ P_1$, son sumas de sumandos directos de P.

Sea $\Gamma = \mathsf{End}_\Lambda(P)^{op}$, la opuesta del álgebra de endomorfismos de P. El teorema de proyectivización de Auslander (ver [2, I, (2.1), (2.5), y (Ejercicio 2)] establece que las categorías $P-\mathsf{mod}$ y $\Gamma-\mathsf{mod}$ son equivalentes mediante los funtores $\mathsf{Hom}_\Lambda(P,-)$ y $P\otimes_\Gamma -$:

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P,-) : P-\mathsf{mod} \rightleftarrows \Gamma-\mathsf{mod} : \quad P\otimes_\Gamma -.$$

Sin embargo, en general no hay relación entre las dimensiones homológicas de las categorías $\Lambda-\mathsf{mod}$ y $\Gamma-\mathsf{mod}$.

En este trabajo consideramos el caso particular en que $P = P^\infty$ es la suma directa un representante de cada clase de isomorfismo de los $\Lambda-$módulos proyectivos indescomponibles P tales que el cociente de P por su radical es un módulo simple de dimensión proyectiva infinita. En particular mostramos que si M es un $\Lambda-$módulo tal que la dimensión proyectiva del $\Gamma-$módulo $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M)$ es finita, entonces se tiene que la dimensión proyectiva de M también lo es. Como consecuencia, si es que Λ tiene dimensión global infinita, todos los $\Gamma-$módulos simples tienen dimensión proyectiva infinita.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2, sección de preliminares, hacemos un breve recuento de notaciones, construcciones y resultados necesarios para los resultados principales, que serán expuestos en la sección 3, en donde además daremos algunos ejemplos.

2 Preliminares

Si bien recordamos algunas nociones y notaciones, referimos al lector a [1, 2], por ejemplo, para mayores detalles de álgebra homológica y teoría de representaciones de álgebras.

En todo este trabajo Λ designará un álgebra de artin, cuyo radical de Jacobson será $\mathfrak{r}$. El radical de la categoría $\Lambda-\mathsf{mod}$ es el ideal $\mathfrak{r}_\Lambda = \mathfrak{r}(\Lambda-\mathsf{mod})$ de ésta última definido, para cada par $X,\ Y$ de $\Lambda-$módulos, mediante $\mathfrak{r}_\Lambda(X,Y) = \{f \in \mathsf{Hom}_\Lambda(X,Y)|\ hfg$ no es un isomorfismo para ningunos $g \in \mathsf{Hom}_\Lambda(U,X)$, y $h \in \mathsf{Hom}_\Lambda(Y,U)\}$.

Dado un $\Lambda-$módulo M, su dimensión proyectiva será denotada por $\mathsf{dp}_\Lambda\ M$, y su top es $\mathsf{top}\ \mathrm{M} = \mathrm{M}/\mathfrak{r}\mathrm{M}$. Además, add M denotará la subcategoría plena de $\Lambda-\mathsf{mod}$ formada por los módulos que son sumas de sumandos directos de M.

La dimensión finitística de Λ es:

$$\mathsf{fin\ dim}\ \Lambda = \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ X|\ X\in\Lambda-\mathsf{mod},\ \mathsf{dp}_\Lambda\ X<\infty\},$$

y su dimensión global es

$$\mathsf{dim\ gl}\ \Lambda = \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ X|\ X\in\Lambda-\mathsf{mod}\}.$$

El siguiente resultado, bien conocido (ver por ejemplo [1, X, 1.4]), nos será de utilidad más adelante.

Lema 2.1 *Si se tiene una sucesión exacta corta en* $\Lambda-\mathsf{mod}$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Entonces:

a) $\mathsf{dp}_\Lambda\ N \leqslant \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ M, \mathsf{dp}_\Lambda\ L+1\}$, *y se da la igualdad si y solamente si es que* $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \neq \mathsf{dp}_\Lambda\ L$.

b) $\mathsf{dp}_\Lambda\, L \leqslant \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\, M, \mathsf{dp}_\Lambda\, N-1\}$ *y se da la igualdad si y solamente si es que* $\mathsf{dp}_\Lambda\, M \neq \mathsf{dp}_\Lambda\, N$.

c) $\mathsf{dp}_\Lambda\, M \leqslant \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\, L, \mathsf{dp}_\Lambda\, N\}$ *y se da la igualdad si y solamente si es que* $\mathsf{dp}_\Lambda\, N \neq \mathsf{dp}_\Lambda\, N+1$.

Denotaremos por S^∞ a la suma directa de los $\Lambda-$módulos simples de dimensión proyectiva infinita (uno por cada clase de isomorfismo). De este modo, P^∞ es la cobertura proyectiva de S^∞.

De manera análoga, $S^{<\infty}$ denotará a la suma directa de los módulos simples de dimensión proyectiva finita (uno por cada clase de isomorfismo). Además, definamos α_Λ mediante:

$$\alpha_\Lambda = \begin{cases} \mathsf{dp}_\Lambda\, S^{<\infty} & \text{si} \quad S^{<\infty} \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad S^{<\infty} = 0. \end{cases}$$

Finalmente el índice de M en S^∞, $[M : S^\infty]$, es el número de factores de composición (no necesariamente distintos) de M cuya dimensión proyectiva es infinita. El índice $[M : S^{<\infty}]$ se define de manera análoga. Es inmediato entonces observar los siguientes hechos, que usaremos libremente en adelante (ver también el Lema (2.3)):

Observación 2.2 *Dado un $\Lambda-$módulo M, entonces:*

a) $[M : S^\infty] = 0$ *implica que* $\mathsf{dp}_\Lambda\, M \leqslant \alpha_\Lambda$*,*

b) $[M : S^\infty] = 0$ *si, y solamente si es que* $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) = 0$.

Dada una subcategoría $\mathcal{F} \subseteq \Lambda-\mathsf{mod}$, diremos que un $\Lambda-$módulo M es filtrado por $\mathcal{F}$ si es que existe una cadena finita de submódulos de M:

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

tales que $M_i/M_{i-1} \in \mathcal{F}$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Recordemos ahora la construcción del funtor $\mathcal{S} : \Lambda-\mathsf{mod} \longrightarrow \Lambda-\mathsf{mod}$ de [3].

En $\Lambda-\mathsf{mod}$ la relación $\geqslant$ definida por $C_1 \geqslant C_2$ si y solamente si es que existe un epimorfismo $C_1 \twoheadrightarrow C_2$ es una relación de orden. El Lema (3.3) de [3] establece que, dado un $\Lambda-$módulo M, la familia de cocientes de M filtrados por $S^{<\infty}$ admite un único elemento maximal, que denotamos por $\mathcal{C}(M)$. Notemos que por construcción se tiene $[\mathcal{C}(M) : S^\infty] = 0$.

Dado que $\mathcal{C}(M)$ es un cociente de M, existe un epimorfismo $p_M : M \twoheadrightarrow \mathcal{C}(M)$. Por definición, $\mathcal{S}(M)$ es el núcleo de p_M. Esto define $\mathcal{S}$ en los objetos de $\Lambda-\mathsf{mod}$. Por otro lado, para un morfismo $f : M \longrightarrow N$, tenemos que $p_N f(M)$ es un cociente de M contenido en $\mathcal{C}(N)$, que es filtrado por $S^{<\infty}$.

De este modo obtenemos la existencia de un epimorfismo $\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}(M) \twoheadrightarrow p_N f(M)$, lo que, por paso al núcleo proporciona un morfismo $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{S}(N)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{S}(M) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\mathcal{S}(f)"] & M \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{S}(N) \arrow[r] & N \arrow[r, "p_N"] & \mathcal{C}(N) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

El siguiente Lema ([3, 3.4]) resume algunas propiedades del funtor $\mathcal{S}$ que utilizaremos más adelante.

Lema 2.3 $\mathcal{S} : \Lambda-\mathsf{mod} \longrightarrow \Lambda-\mathsf{mod}$ *es un funtor aditivo que tiene las siguientes propiedades:*

a) $\mathsf{dp}_\Lambda\, M < \infty$ *si y solamente si es que* $\mathsf{dp}_\Lambda\, \mathcal{S}(M) < \infty$*,*

b) Si $[M : S^\infty] \neq 0$*, entonces* $\mathsf{top}\, \mathcal{S}(\mathrm{M}) \in \mathsf{add}\, \mathrm{S}^\infty$*,*

c) $\mathsf{dp}_\Lambda\, M \leqslant \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\, \mathcal{S}(M), \alpha_\Lambda\}$*,*

d) $\mathcal{S}$ preserva los epimorfismos y los monomorfismos,

e) Si $[M : S^\infty] = 0$ *entonces* $\mathcal{S}(M) = 0$.

3 Resultados

Dado $M_0 \in P^\infty-\mathsf{mod}$, el resultado de Auslander mencionado en la introducción garantiza que

$$P^\infty \otimes_\Gamma \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M_0) \simeq M_0.$$

Si M es un $\Lambda-$módulo arbitrario, esto no es cierto. Sin embargo $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M)$ sigue siendo un $\Gamma-$módulo, de modo que, de nuevo gracias al resultado de Auslander, debe existir un $\Lambda-$módulo $M' \in P^\infty-\mathsf{mod}$ tal que

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M').$$

Consecuentemente tendremos entonces

$$\begin{aligned} P^\infty \otimes_\Gamma \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) &\simeq P^\infty \otimes_\Gamma \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M') \\ &\simeq M'. \end{aligned}$$

En lo que sigue construiremos concretamente el módulo M', y veremos que además tiene algunas propiedades adicionales:

Proposición 3.1 *Dado un $\Lambda-$módulo M, existe $M' \in P^\infty-\mathsf{mod}$, tal que*

a) $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M')$

b) $\mathsf{dp}_\Lambda\, M < \infty$ *si y solamente si es que* $\mathsf{dp}_\Lambda\, M' < \infty$*, y, en este caso*

$$\begin{aligned} \mathsf{dp}_\Lambda\, M' &\leqslant \mathsf{max}\{\mathsf{dp}_\Lambda\, \mathcal{S}(M), \alpha_\Lambda\} \\ &\leqslant \mathsf{max}\{\mathsf{dp}_\Lambda\, M - 1, \alpha_\Lambda\}. \end{aligned}$$

Demostración: La demostración de $a)$ es la discusión que precede el enunciado de la Proposición. El enunciado de $b)$ seguirá de la construcción de M' y del Lema (2.1). Tenemos dos casos distintos a tratar, según $[M : S^\infty]$ sea cero o no.

Supongamos primero que $[M : S^\infty] = 0$, es decir que M no tiene factores de composición de dimensión proyectiva infinita. En virtud de la Observación (2.2), tenemos que

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) = 0 \qquad (1)$$

con lo que podemos tomar $M' = 0$ y no hay nada que demostrar.

Podemos entonces suponer que $[M : S^\infty] \neq 0$. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{C}(M) \longrightarrow 0. \qquad (2)$$

Como $\mathcal{C}(M)$ es filtrado por $S^{<\infty}$, tenemos que $[\mathcal{C}(M) : S^\infty] = 0$. En virtud de la exactitud de $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, -)$ y la Observación (2.2), tenemos entonces

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{S}(M)) \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M). \qquad (3)$$

Además el Lema (2.3), parte $b)$, da que la cobertura proyectiva de $\mathcal{S}(M)$, que llamaremos P_0, está en $\mathsf{add}\ P^\infty$. Tenemos entonces un diagrama cuya línea y columna son exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathcal{S}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M) \arrow[d, "i"] & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega\mathcal{S}(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] & \mathcal{S}(M) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{C}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Sea $M' = \mathsf{Coker}\ fi$, j obtenido de i por paso a los conúcleos, y $K = \mathsf{Ker}\ j$. El lema de la serpiente nos da un diagrama conmutativo con líneas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M) \arrow[r, "fi"] \arrow[d, "i"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_\Lambda\mathcal{S}(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{S}(M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathcal{C}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de modo que $K \simeq \mathcal{C}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M)$.

Al aplicar el funtor $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, -)$ se obtiene otro diagrama conmutativo de líneas exactas. El hecho que $[\mathcal{C}\Omega_\Lambda \mathcal{S}(M) : S^\infty] = 0$, nos dice que:

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, K) &\simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{C}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M)) \\ &\simeq 0. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) &\simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{S}(M)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P, M). \end{aligned}$$

Supongamos que $[\Omega_\Lambda\mathcal{S}M : S^\infty] \neq 0$. Esto implica que $\mathsf{top}\ \mathcal{S}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(\mathrm{M}) \in \mathsf{add}\ \mathrm{S}^\infty$, de nuevo gracias al Lema (2.3). Esto a su vez implica que la cobertura proyectiva de $\mathcal{S}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M)$ está en $\mathsf{add}\ P^\infty$. Como también es el caso para P_0, tenemos efectivamente $M' \in P^\infty{-}\mathsf{mod}$, tal como queríamos. El Lema (2.3), parte $c)$ y la sucesión exacta (2) dan que $\mathsf{dp}_\Lambda\ M < \infty$ si y solamente si $\mathsf{dp}_\Lambda\ \mathcal{S}(M) < \infty$. Además, como $K \simeq \mathcal{C}\Omega_\Lambda\mathcal{S}(M)$, tenemos, gracias a la Observación 2.2, $a)$, que $\mathsf{dp}_\Lambda\ K \leqslant \alpha$. Así, gracias el Lema (2.1), aplicado a la tercera columna del diagrama precedente, nos dice que $\mathsf{dp}_\Lambda\ \mathcal{S}(M) < \infty$ si y solo si es que $\mathsf{dp}_\Lambda\ M' < \infty$. Las desigualdades deseadas siguen del Lema (2.1).

Si, al contrario, tenemos que $[\Omega\mathcal{S}M : S^\infty] = 0$ tenemos, por el enunciado $b)$ de la Observación 2.2, que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \Omega_\Lambda\mathcal{S}(M)) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0) &\simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{S}(M)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \end{aligned}$$

con lo que P_0 es el módulo M' que buscábamos.

□

Observación 3.2 *Las sucesiones exactas en* $P^\infty{-}\mathsf{mod}$ *no necesariamente son exactas en* $\Lambda{-}\mathsf{mod}$*, incluso si la primera es una subcategoría plena de la segunda. Es más, el funtor* $P^\infty \otimes_\Gamma : \Gamma{-}\mathsf{mod} \longrightarrow P^\infty{-}\mathsf{mod}$ *es exacto, pero el funtor* $P^\infty \otimes_\Gamma : \Gamma{-}\mathsf{mod} \longrightarrow \Lambda{-}\mathsf{mod}$ *no.*

Proposición 3.3 *Sea* $M \in \Lambda{-}\mathsf{mod}$*, entonces:*

$a)$ *Si* P_0 *es la cobertura proyectiva de* $\mathcal{S}(M)$*,* $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0)$ *es la cobertura proyectiva de* $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M)$ *en* $\Gamma{-}\mathsf{mod}$.

$b)$ $\Omega_\Gamma^n \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, (\Omega_\Lambda\mathcal{S})^n M)$.

Demostración: $a)$ Notemos primero que, de nuevo, si $[M, S^\infty] = 0$, tendríamos, por la Observación (2.2), parte $b)$ que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) = 0$; y por el Lema (2.3), parte $e)$, $\mathcal{S}(M) = 0$, con lo que no habría nada que demostrar.

Sin pérdida de generalidad podemos entonces suponer que $[M, S^\infty] \neq 0$. Recordemos además que la Ecuación (3) nos dice que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{S}(M))$. Sea $f : P_0 \longrightarrow \mathcal{S}(M)$ la cobertura proyectiva de $\mathcal{S}(M)$. Tenemos entonces una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \Omega_\Lambda \mathcal{S}(M) \xrightarrow{g} P_0 \xrightarrow{f} \mathcal{S}(M) \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, -)$ obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \Omega_\Lambda \mathcal{S}(M)) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0) \xrightarrow{g_*} \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \mathcal{S}(M)) \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

Donde $f_* = \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, f)$, y $g_* = \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, g)$. Como vimos en la demostración de la Proposición (3.1), $P_0 \in \mathsf{add}\ P^\infty$, de modo que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0)$ es un $\Gamma-$módulo proyectivo. Para demostrar que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, g)$ es una cobertura proyectiva, debemos demostrar que es un morfismo superfluo ([1, VIII, (2.1)]), o, de manera equivalente, que $\mathsf{Ker}\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, g)$, está contenido en el radical de $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0)$. Dada la exactitud de la sucesión precedente, esto es equivalente a mostrar que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, f)$ está en $\mathfrak{r}_\Gamma$.

Supongamos que no es el caso. Dado que los $\Gamma-$módulos proyectivos son de la forma $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P')$ con $P' \in \mathsf{add}\ P^\infty$ esto equivale a suponer que existe un factor directo indescomponible P_0' de P_0 tal que la composición de f con la proyección canónica π de P^∞ en P_0'

$$\Omega_\Lambda \mathcal{S}(M) \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{\pi} P_0'$$

induce un morfismo:
$\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \pi f) : \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0) \longrightarrow \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0')$ que no está en $\mathfrak{r}_\Gamma$. Como $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_0')$ es proyectivo indescomponible, tenemos que $\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, \pi f)$ es una retracción con lo que todo morfismo $P^\infty \longrightarrow P_0'$ se factoriza por πf. Pero P_0' es factor directo de P^∞, así que tenemos una proyección canónica $p : P^\infty \longrightarrow P_0'$. Decir que ésta se factoriza por πf implica que πf no está en $\mathfrak{r}_\Lambda$ lo que contradice el hecho que f si está en $\mathfrak{r}_\Lambda$.

$b)$ Para $n = 0$ no hay nada que probar, y para $n = 1$, el resultado sigue inmediatamente de la parte $a)$ y la sucesión (3). Para $n \geqslant 2$ se procede por inducción obvia.

□

Proposición 3.4 *Sea $M \in \Lambda-\mathsf{mod}$. Entonces:*

a) $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \leqslant \max\{n + \mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^n M, \alpha_\Lambda + n - 1\}$

b) Si es que $\mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \leqslant s < \infty$, entonces $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \leqslant \alpha_\Lambda + s + 1 < \infty$.

Demostración: $a)$ Por el Lema (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathsf{dp}_\Lambda\ M &\leqslant \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ \mathcal{S}(M), \alpha_\Lambda\} \\ &\leqslant \mathsf{sup}\{1 + \mathsf{dp}_\Lambda\ \Omega\mathcal{S}M, \alpha_\Lambda\}, \end{aligned}$$

de modo que el enunciado es verdadero para $n = 1$. Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para $n - 1 \geqslant 1$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \mathsf{dp}_\Lambda\ M &\leqslant \mathsf{sup}\{n - 1 + \mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^{n-1}M, \alpha_\Lambda + n - 2\} \\ &\leqslant \mathsf{sup}\{n - 1 + \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ S(\Omega\mathcal{S})^{n-1}M, \alpha_\Lambda\}, \\ &\qquad \alpha_\Lambda + n - 2\} \\ &\leqslant \mathsf{sup}\{n + 1 + \alpha_\Lambda, \mathsf{dp}_\Lambda\ \mathcal{S}(\Omega\mathcal{S})^{n-1}M + n - 1\} \\ &\leqslant \mathsf{sup}\{n + 1 + \alpha_\Lambda, 1 + \mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^n M + n - 1\} \\ &= \mathsf{sup}\{\mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^n M + n, \alpha_\Lambda + n + 1\} \end{aligned}$$

$b)$ Supongamos que $\mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \leqslant s < \infty$, de modo que $\Omega_\Gamma^{s+1}\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) = 0$, así que en virtud de la Proposición (3.3) tenemos que

$$\mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, (\Omega\mathcal{S})^{s+1}(M)) = 0$$

lo que implica que $\mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^{s+1}M \leqslant \alpha_\Lambda$. Por la parte $a)$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathsf{dp}_\Lambda\ M &\leqslant \mathsf{sup}\{s + 1 + \mathsf{dp}_\Lambda\ (\Omega\mathcal{S})^{s+1}, \alpha_\Lambda + s \\ &\leqslant \mathsf{sup}\{s + 1 + \alpha_\Lambda, \alpha_\Lambda + 1\} \\ &\leqslant \alpha_\Lambda + s + 1. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.5 *Para todo $\Gamma-$módulo simple ${}_\Gamma S$ se tiene* $\mathsf{dp}_\Gamma\ S = \infty$.

Demostración: Es claro que ${}_\Gamma S \simeq \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty,\ {}_\Lambda S')$ para algún $\Lambda-$módulo simple S' que es factor directo de S^∞, de modo que $\mathsf{dp}_\Lambda\ S' = \infty$. Por el resultado precedente se tiene que $\mathsf{dp}_\Gamma\ S = \infty$.

□

Notemos que el corolario precedente es válido solamente en el caso en que P^∞ es la suma directa de todos los $\Lambda-$módulos proyectivos indescomponibles cuyo top tiene dimensión global infinita. El siguiente ejemplo muestra que al dejar de lado alguno de estos proyectivos, se puede obtener un álgebra de dimensión global arbitraria.

Ejemplo 3.6 *Sean $\Bbbk$ un cuerpo, $\widetilde{\mathbb{A}}_n$ el ciclo orientado de longitud n, I el ideal de $\Bbbk\widetilde{\mathbb{A}}_n$ generado por los caminos de longitud dos y $\Lambda = \Bbbk\widetilde{\mathbb{A}}_n/I$. Tenemos que* $\mathsf{dp}_\Lambda\ S_i = \infty$ *para $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & j-1 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] & & & & j \arrow[dl] \\ & n \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] & j+1 \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Si tomamos $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_{n-1}$, entonces $\Gamma = \mathsf{End}_\Lambda(P)^{op} \simeq \Bbbk\mathbb{A}_{n-1}/J$ (donde J es el ideal generado por los caminos de longitud dos) es un álgebra triangular tal que $\mathsf{dim\ gl}\ \Gamma = \mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, S_{n-1}) = n-2$.

Observación 3.7 *En la Proposición (2.1) mostramos que si es que $\mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \leqslant s$, entonces $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \leqslant \alpha_\Lambda + s + 1$. En el otro sentido, si pudiésemos encontrar una constante β tal que $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \leqslant s$ implica $\mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \leqslant s + \beta$, tendríamos*

$$\mathsf{fin\ dim}\ \Lambda < \infty \Longleftrightarrow \mathsf{fin\ dim}\ \Gamma < \infty.$$

En efecto, supongamos que tenemos una tal constante β y que $\mathsf{fin\ dim}\ \Lambda < \infty$. Sea $X \in \Gamma{-}\mathsf{mod}$ con $\mathsf{dp}_\Gamma\ X < s$. Como $X = \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M)$ para algún $M \in P^\infty{-}\mathsf{mod}$ con $\mathsf{dp}_\Lambda\ M \leqslant \mathsf{fin\ dim}\ \Lambda$, tendríamos entonces

$$\mathsf{dp}_\Gamma\ X = \mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, M) \leqslant \mathsf{fin\ dim}\ \Lambda + \beta$$

La otra implicación se muestra de la misma manera.

Desafortunadamente, no es posible obtener una tal constante β, como el siguiente ejemplo muestra:

Ejemplo 3.8 *Sea Q el carcaj*

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] & 5 \arrow[l, shift right, "\epsilon_1"'] \arrow[l, shift left, "\epsilon_2"] \\
2 \arrow[dr, "\beta"'] & & 4 \arrow[u, "\delta"'] \\
 & 3 \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos el ideal $I =< \alpha\beta\gamma,\ \beta\gamma\delta\epsilon_1,\ \beta\gamma\delta\epsilon_2,\ \delta\epsilon_2,\ \gamma\delta\epsilon_1\alpha\beta,\ \epsilon_2\alpha\beta >$, y sea $\Lambda = \Bbbk Q/I$. Un cálculo directo muestra que $\mathsf{dp}_\Lambda\ S_2 = \mathsf{dp}_\Lambda\ S_3 = \mathsf{dp}_\Lambda\ S_4 = \mathsf{dp}_\Lambda\ S_5 = \infty$, y $\mathsf{dp}_\Lambda\ S_1 = 3$, de modo que $P^\infty = P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 \oplus P_5$, y $\alpha_\Lambda = 3$. Si, como antes, denotamos por Γ al álgebra $\mathsf{End}_\Lambda(P^\infty)^{op}$, tenemos que $\mathsf{dp}_\Lambda\ P_1 = 0$, pero $\mathsf{dp}_\Gamma\ \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_1) = \infty$.

Terminemos determinando el $\Lambda{-}$módulo M' tal que

$$P^\infty \otimes_\Gamma \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_1) \simeq M'.$$

Notemos que $P_1 = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$. De acuerdo a la construcción de la Proposicón (3.1) tenemos:

$$\mathcal{S}(P_1) = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\ ,\ \Omega_\Lambda\mathcal{S}(P_1) = \begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\ ,\ y\ \mathcal{S}(\Omega_\Lambda\mathcal{S}(P_1)) = \begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\ .$$

Así, el conúcleo del morfismo $\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix} \xrightarrow{f} \begin{smallmatrix}2\\3\\4\\5\end{smallmatrix}$ es $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$,

de modo que

$$P^\infty \otimes_\Gamma \mathsf{Hom}_\Lambda(P^\infty, P_1) = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\ .$$

El módulo $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ tiene dimensión proyectiva 2. En efecto, su resolución proyectiva es:

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}4\\5\\1\\2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\3\\4\\5\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \longrightarrow 0\ .$$

Referencias bibliográficas

[1] I. Assem. *Algèbres et modules: cours et exercices*. Enseignement des mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa–Masson, Ottawa–Paris, 1997.

[2] M. Auslander, I. Reiten, and S.O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] F. Huard, M. Lanzilotta, and O. Mendoza. Finitistic dimension through inifnite projective dimension. preprint, 2007.