

Edad del universo y la densidad de energía de la radiación

Antonina Calahorrano¹, Carlos A. Marín^{1*}

¹Departamento de Física, Colegio de Ciencias e Ingeniería, Universidad San Francisco de Quito

*Autor principal/Corresponding author, e-mail: cmarin@usfq.edu.ec

Editado por/Edited by: Cesar Zambrano, PhD.

Recibido/Received: 2015/10/22. Aceptado/Accepted: 2015/11/01.

Publicado en línea/Published on Web: 2015/12/30. Impreso/Printed: 2015/12/30

Age of the universe and the energy density of radiation

Abstract

From the mathematical expression relating the redshift parameter with time and the cosmological densities of matter, radiation and vacuum in the Lemaitre model, we have derived an equation for the age of the universe at present time taking into account the contribution of the radiation energy density (that generally is neglected in the calculations). Additionally we calculate the value of the redshift parameter in the transition age when matter and radiation decouple.

Keywords. general relativity, cosmology, Einstein, Friedmann, Lemaitre, redshift.

Resumen

Partiendo de la ecuación que relaciona el parámetro de corrimiento hacia el rojo con el tiempo y las densidades cosmológicas de materia, radiación y vacío en el modelo de Lemaitre, calculamos la edad del universo en el momento actual tomando en cuenta la contribución de la densidad de energía de la radiación (contribución que generalmente se desprecia en los cálculos). Adicionalmente calculamos el valor del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición cuando materia y radiación se desacoplan.

Palabras Clave. relatividad general, cosmología, Einstein, Friedmann, Lemaitre, corrimiento hacia el rojo

Introducción

En el año 1922, el físico y matemático ruso Alexander Friedmann, usando las ecuaciones de campo de Einstein, probó que el universo debería estar expandiéndose a cambio de que dos suposiciones básicas fueran ciertas: “El universo es isótropo y homogéneo” [1, 2, 3]. La primera suposición (isotropía) nos dice que a gran escala (a nivel de galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias en el espacio profundo) el universo parece el mismo en cualquier dirección que se observe. La segunda hipótesis (homogeneidad) dice que lo mismo sería cierto para un observador ubicado en otra galaxia. El descubrimiento de Hubble en 1929 de que el universo se estaba expandiendo, fue de allí, un gran triunfo para la Teoría General de la Relatividad (T.G.R.).

La evidencia de la isotropía del universo a gran escala se dio en 1965 cuando dos científicos americanos que trabajaban para los laboratorios de la Bell Telephone en Nueva Jersey, Arno Penzias y Robert Wilson, descubrieron un ruido de fondo (en forma de radiación de microondas) que parecía venir de los confines del universo. Esta radiación tiene un espectro térmico con una tempe-

ratura del orden de 2,726 grados Kelvin. El ruido de fondo cósmico es prácticamente igual en todas direcciones. La existencia del ruido o radiación de fondo cósmico de microondas (cosmic microwave background radiation), es entonces, una confirmación extremadamente precisa de la primera hipótesis de Friedmann sobre la isotropía del universo a gran escala. Por su descubrimiento, Penzias y Wilson, recibieron el premio Nobel de Física en el año 1978.

No hay evidencia científica a favor de la segunda hipótesis (la homogeneidad del universo a gran escala). En palabras de Stephen Hawking: “confiamos en ella sólo por razones de modestia” [3].

Vemos entonces que nuestro lugar en el universo no es especial. Un observador en una estrella de una galaxia distante vería un universo muy similar al que observamos. A esta aseeración se la conoce como “principio cosmológico”. En otras palabras, en cualquier instante, el universo aparecería el mismo para todo observador, sin importar el lugar en que se encuentre.

En enero de 1998, el grupo que conforma el proyecto Supernova Cosmology Project, dirigido por Saul Perl-

ISSN 1390-5384



mutter [4, 5, 6, 2], dió a conocer los resultados de su análisis de la variación del parámetro de corrimiento hacia el rojo con respecto a la magnitud efectiva (brillo) de 42 supernovas distantes del tipo Ia (las supernovas más brillantes) recientemente descubiertas. Para sorpresa de todos, estas supernovas lucían más tenues de lo que se esperaba, de acuerdo con el modelo standard del universo, en el que la expansión es desacelerada. Sus observaciones parecen indicar que el ritmo de expansión del universo se está incrementando, es decir que el universo se está acelerando. Dichos resultados fueron confirmados por un grupo de investigación independientemente dirigido por Brian Schmidt (High-Z Supernova) [7]. Estas medidas son compatibles con un universo plano, en el que la constante cosmológica es diferente de cero. También dan soporte a la teoría de que el universo atravesó un periodo de violenta inflación, cuando la constante cosmológica dominó sobre los efectos gravitatorios dando paso a una fase de de Sitter de brevísima duración.

La métrica del espacio-tiempo que mejor describe la evolución del universo y está de acuerdo con el principio cosmológico es la de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker FLRW [2, 8, 9, 10, 11, 1, 12]. En coordenadas esféricas r, θ, ϕ se escribe:

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - R^2(t) \left(\frac{(d\sigma)^2}{1 - K\sigma^2} + \sigma^2 (d\Omega)^2 \right) \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, $R(t)$ es el factor de escala del universo que depende del tiempo cósmico t y es proporcional al tamaño del universo, $\sigma = \frac{r}{R}$. K es un parámetro independiente del tiempo que especifica la curvatura del universo y que puede ser $K = 1$ para un universo curvado en forma parecida a la superficie de una esfera (universo cerrado), $K = -1$ para un universo curvado en sentido contrario como la superficie de una silla de montar (universo abierto) y $K = 0$ para un universo plano. Finalmente $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2$.

En este modelo el universo es como un fluido perfecto en el que las galaxias serían algo así como las partículas de dicho fluido siguiendo el movimiento del mismo [8]. El tiempo cósmico está dado por relojes en reposo con respecto al fluido cósmico, sincronizados con el instante en el que la densidad y la temperatura del fluido alcanzan un cierto valor esperado. Entonces, usando dichos relojes sincronizados, el estado físico del universo dependerá del tiempo en la misma manera en cualquier lugar.

El cuadrado del elemento de arco $(ds)^2$ se puede escribir:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

donde el tensor métrico covariante está dado por la ma-

triz:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2}{1-K\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2\sigma^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

El tensor contravariante correspondiente es:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-K\sigma^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R^2\sigma^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein son [7, 12, 17]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \quad (5)$$

con

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^* g_{\mu\nu}.$$

G es la constante de gravitación universal. En la anterior ecuación $R^* = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. A $R_{\mu\nu}$ se le denomina tensor de Ricci, el cual se define a partir del Tensor de Riemann-Chirstoffel $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ que determina la curvatura del espacio-tiempo. $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ donde

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\Gamma^\mu_{\nu\sigma}) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \quad (6)$$

$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ son los símbolos de Christoffel de segunda especie

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (7)$$

λ es la constante cosmológica introducida por Einstein en 1917 y es una medida de la contribución a la densidad de energía del universo debido a fluctuaciones del vacío. El valor de dicha constante es $|\lambda| < 3 \times 10^{-52}$ metros⁻² [2, 13, 14]. El término proporcional a λ en las ecuaciones de campo de Einstein (ecuación 5) puede ser interpretado como un tensor efectivo de energía-momentum dado por [15, 16] (ver particle properties databooklet)

$$Tef_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \lambda g_{\mu\nu} \quad (8)$$

Finalmente $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía momentum que para un fluido perfecto (como el fluido cosmológico) es

$$T_{\mu\nu} = \frac{(\rho + P)}{c^2} u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (9)$$

donde ρ es la densidad de energía del universo y P es la presión del fluido cósmico. u_μ es el cuadrivector velocidad que en un marco de referencia comovil es $u_\mu = (c, 0, 0, 0)$.

Los elementos no nulos del tensor energía momentum son:

$$T_{00} = \rho \quad (10)$$

$$T_{11} = \frac{PR^2}{1 - K\sigma^2} \quad (11)$$

$$T_{22} = PR^2\sigma^2 \quad (12)$$

$$T_{33} = PR^2\sigma^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Ya que la métrica es diagonal y el espacio es de máxima simetría [17], $R_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ [17]:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = -3Kg_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (14)$$

Las componentes diagonales del tensor de Ricci son:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R} \quad (15)$$

$$R_{11} = \frac{R\ddot{R} + 2\left(\dot{R}\right)^2 + 2Kc^2}{c^2(1 - K\sigma^2)} \quad (16)$$

$$R_{22} = \frac{\sigma^2}{c^2} \left(R\ddot{R} + 2\left(\dot{R}\right)^2 + 2Kc^2 \right) \quad (17)$$

$$R_{33} = \frac{\sigma^2 \sin^2 \theta}{c^2} \left(R\ddot{R} + 2\left(\dot{R}\right)^2 + 2Kc^2 \right) \quad (18)$$

A partir de estas expresiones, podemos calcular fácilmente el escalar de Ricci R^* :

$$R^* = -\frac{6}{R^2 c^2} \left(R\ddot{R} + \left(\dot{R}\right)^2 + Kc^2 \right) \quad (19)$$

y las componentes 00 y 11 del tensor de Einstein:

$$G_{00} = \frac{3}{R^2 c^2} \left(\left(\dot{R}\right)^2 + Kc^2 \right) \quad (20)$$

$$G_{11} = -\frac{\left(2R\ddot{R} + \left(\dot{R}\right)^2 + Kc^2 \right)}{c^2(1 - K\sigma^2)} \quad (21)$$

Introduciendo las componentes 00 y 11 del tensor de Einstein y del tensor energía cantidad de movimiento en las ecuaciones de campo de Einstein obtenemos las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi\frac{G\rho}{c^2} - \frac{Kc^2}{R^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (22)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P) + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (23)$$

donde H es el parámetro de Hubble que es una medida del ritmo de expansión del universo. Finalmente, ya que la derivada covariante del tensor energía-momentum es cero:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} = 0 \quad (24)$$

tenemos, evaluando para $\mu = 0$, que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0 \quad (25)$$

Esta última relación también puede ser derivada a partir del primer principio de la termodinámica.

En la literatura [2, 14, 12, 18] se puede encontrar la expresión de la edad del universo en el modelo de Lemaitre (para un universo plano) calculada sin tomar en cuenta la contribución de la densidad de energía de la radiación. En el presente artículo calcularemos la edad del universo en un instante cualquiera y en particular en el momento actual teniendo en cuenta dicha contribución. Adicionalmente deduciremos una expresión para el valor del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición cuando materia y radiación se desacoplaron aproximadamente 380000 años después de la Gran Explosión.

1 Ecuaciones de Friedmann y los parámetros cosmológicos

La ecuación de Friedmann (22) se puede escribir

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi\frac{G}{c^2}(\rho_m + \rho_r) - \frac{Kc^2}{R^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (26)$$

donde ρ_m y ρ_r representan la densidad de energía de la materia y la radiación, respectivamente.

En términos de los parámetros cosmológicos de densidad de materia, radiación y del vacío

$$\begin{aligned} \Omega_m &\equiv \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 c^2} \\ \Omega_r &\equiv \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_r}{3H^2 c^2} \\ \Omega_v &\equiv \frac{\rho_v}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_v}{3H^2 c^2} = \frac{\lambda c^2}{3H^2} \end{aligned} \quad (27)$$

donde ρ_v es la densidad de energía del vacío [2, 18, 14], la ecuación (26) se puede escribir

$$\left(\dot{R}\right)^2 = \Omega_{mr} H^2 R^2 - Kc^2 + \Omega_v H^2 R^2 \quad (28)$$

donde $\Omega_{mr} \equiv \Omega_m + \Omega_r$. Recordando que $\left(\dot{R}\right)^2 = H^2 R^2$, a partir de (28) obtenemos:

$$Kc^2 = R^2 H^2 (\Omega_{mr} + \Omega_v - 1) \quad (29)$$

La ecuación (29) nos da el parámetro de curvatura del universo en función de las contribuciones al parámetro de densidad cosmológica, el factor de escala y el parámetro de Hubble. Observaciones del proyecto WMAP-9 y de Planck (2013) indican que el valor de la edad

del universo es de 13.800 ± 0.038 Gyr, con un intervalo de confianza del 68 % y considerando el efecto BAO (Baryon Acoustic Oscillations)[19]. El modelo que es consistente con esta edad es el que propone $K = 0$, es decir, un universo plano. Reemplazando en (29), se ve claramente que:

$$\Omega_T \equiv \Omega_{mr} + \Omega_v = 1 \quad (30)$$

Siendo Ω_T la densidad cosmológica total. Es evidente que (30) es válida también en el momento actual. Igualmente (29) en el momento actual se se puede escribir $Kc^2 = H_0^2 R_0^2 (\Omega_{T0} - 1)$.

Consideremos nuevamente la ecuación (25). Dicha expresión es válida para cualquiera de las densidades de energía (de materia, radiación o vacío). Asumamos una ecuación de estado de la forma $P = \omega\rho$ donde ω es una constante. Entonces, la ecuación (25) se puede escribir

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho(1 + \omega) = 0$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)} \quad (31)$$

donde ρ_0 y R_0 representan la densidad y el factor de escala del universo en el momento actual, respectivamente.

Entonces para cada uno de los tipos de densidades:

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega_m)} \quad (32)$$

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega_r)} \quad (33)$$

$$\rho_v = \rho_{v0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)} \quad (34)$$

donde $\omega_m = 0$, $\omega_r = \frac{1}{3}$ y $\omega = -1,00 \pm 0,06$ [18]

Si $K = 0$ y despreciamos la contribución de la densidad de energía de la radiación, la ecuación (28) se reduce a

$$(\dot{R})^2 = H^2 R^2 (\Omega_m + \Omega_v) \quad (35)$$

que se puede también escribir:

$$\begin{aligned} (\dot{R})^2 &= H_0^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\Omega_{m0} \frac{\rho_m}{\rho_{m0}} + \Omega_{v0} \right) \\ &= H_0^2 \left(\Omega_{m0} \frac{R_0}{R} + \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \Omega_{v0} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

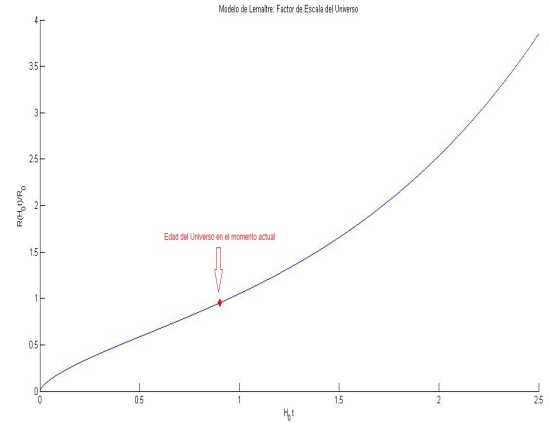


Figura 1: Factor de escala del universo como función del tiempo en el modelo de Lemaitre. En la figura se muestra la edad del universo en el momento actual

donde hemos usado la ecuación (32) con $\omega_m = 0$. La ecuación (36) se puede escribir utilizando separación de variables

$$\frac{R^{\frac{1}{2}} dR}{\left(R^3 + \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{2}}} = H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} dt \quad (37)$$

Esta expresión se puede integrar fácilmente haciendo el cambio de variable

$$R = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \theta, \quad (38)$$

el resultado es:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \quad (39)$$

A partir de (39) podemos calcular la edad del universo en el momento actual t_{mv0} recordando que $R(t_0) = R_0$. El resultado es la conocida expresión [2, 12, 14, 18]

$$t_{mv0} = \frac{2}{3H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{1 + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (40)$$

donde hemos usado $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} = 1$. En la figura (1) se representa el factor de escala del universo en función del tiempo.

2 Parámetro de corrimiento hacia el rojo y la edad del universo

El parámetro de corrimiento hacia el rojo se define a través de la ecuación

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \quad (41)$$

donde λ es la longitud de onda de una línea espectral emitida por la fuente distante (dicha fuente es conocida en la Tierra), y λ' es la longitud de onda observada en

el espectro de la fuente de luz distante [2, 18, 20, 21]. Ahora, ya que: $\lambda \propto R(t)$ y $\lambda' \propto R(t_0)$ tenemos:

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \quad (42)$$

Esto es equivalente a considerar que los eventos en galaxias cercanas se dilatan temporalmente acorde a cuánto el universo se ha expandido desde que el fotón que se observa fue emitido [21]. Esto es una consecuencia directa de la isotropía de la radiación de fondo cósmico.

Consideremos la expresión

$$\frac{8}{3}\pi G\rho = \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_v)$$

que se puede escribir:

$$\frac{8}{3}\pi G\rho = \frac{8}{3}\pi G\left(\rho_{m0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \rho_{r0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 + \rho_{v0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)}\right) \quad (43)$$

donde $R_0 = R(t_0)$. En términos de los parámetros cosmológicos de densidad tenemos:

$$\frac{8}{3}\pi G\rho = H_0^2 c^2 \left(\Omega_{m0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_{r0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 + \Omega_{v0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)}\right) \quad (44)$$

Volviendo a la primera ecuación de Friedmann (22) y usando $\lambda = \frac{8\pi G\rho_v}{c^4}$ tenemos que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho_m + \rho_r + \rho_v) - \frac{Kc^2}{R^2} \quad (45)$$

Utilizando la ecuación (44) en la anterior ecuación tenemos que

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_{r0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 + \Omega_{v0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)}\right) - \frac{Kc^2}{R^2} \quad (46)$$

Introduciendo el valor de Kc^2 dado en la expresión (29) (evaluado en el momento actual), (46) se escribe

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 + \Omega_{r0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 + \Omega_{v0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right) \quad (47)$$

donde $\Omega_{T0} = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{v0}$. En términos del parámetro de corrimiento hacia el rojo (ver (42)) la ecuación (47) se transforma en:

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2\right) \quad (48)$$

Derivando (42) con respecto al tiempo se obtiene: $\dot{R} = -R_0 \frac{\dot{z}}{(1+z)^2}$, por lo que $H = \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{\dot{z}}{1+z}$. Usando estos valores:

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z) \left\{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

A partir de esta relación haciendo separación de variables podemos calcular la edad del universo en un instante t cualquiera:

$$t = -H_0^{-1} \int_{\infty}^z \frac{dz}{(1+z)} \times \frac{1}{\left\{\Omega_{mrv0}(z) - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (50)$$

donde

$$\Omega_{mrv0}(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} \quad (51)$$

Para un universo plano ($K = 0, \Omega_{T0} = 1$) tomando $\omega = -1$, la edad del universo en el momento actual se puede calcular a partir de la integral:

$$t_{mrv0} = -H_0^{-1} \int_{\infty}^0 dz \left(\frac{1}{(1+z)} \times \frac{1}{\left\{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}\right\}^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (52)$$

Si no tomamos en cuenta la contribución de la densidad de energía de la radiación la integral se reduce a

$$t_{mv0} = -\left(\frac{H_0^{-1}}{\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}\right) \int_{\infty}^0 dz \left(\frac{1}{(1+z)} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}(1+z)^3\right)^{\frac{1}{2}}}\right), \quad (53)$$

y con el cambio de variable

$$1 + z = \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \theta \quad (54)$$

la integral indefinida se transforma en

$$\int \frac{dz}{(1+z) \left\{ 1 + \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} (1+z)^3 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta} \right). \quad (55)$$

Introduciendo la última integral en (53) junto con la expresión (54) y recordando que $\cosh \theta = (1 + \sinh^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$ tenemos:

$$t_{mv0} = - \left(\frac{2H_0^{-1}}{3\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \right) \times \left(\ln \left(\frac{(1+z)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(1 + (1+z)^3 \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right)_{\infty} \quad (56)$$

Recordando nuevamente que $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} = 1$, obtenemos nuevamente la expresión (40).

3 Edad del universo considerando la contribución de la densidad de energía de la radiación

Considerando un universo plano ($\Omega_{T0} = 1$) y tomando $\omega = -1$, la ecuación (50) se escribe:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{dz}{(1+z)} \{ \Omega_{rm0}(z) + \Omega_{v0} \}^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (57)$$

donde

$$\Omega_{rm0}(z) = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4. \quad (58)$$

(57) también se puede escribir

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z dz \left(\frac{1}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}} \right\}^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (59)$$

Sin embargo, como Ω_{r0} sigue siendo mucho menor que las otras dos densidades cosmológicas, se puede utilizar la aproximación a primer orden en serie de Taylor $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ por lo que

$$t \approx -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}} \right\} dz}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \quad (60)$$

Esta expresión puede ser separada en dos términos:

$$t \approx t_{mv} + \frac{1}{2H_0} \int_{\infty}^z dz \left(\frac{\Omega_{r0}(1+z)^3}{(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (61)$$

donde

$$t_{mv} = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z dz \frac{1}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \quad (62)$$

que también se puede escribir

$$t \approx t_{mv} + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \int_{\infty}^z \frac{(1+z)^3 dz}{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} (1+z)^3 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (63)$$

Realizando el cambio de variable $v = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} (1+z)$,

el diferencial de v es $dv = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} dz$. Se ve claramente que cuando $z \rightarrow \infty$ entonces $v \rightarrow \infty$. Si queremos calcular la edad del universo en el momento actual, entonces debemos hacer el parámetro de corrimiento hacia el rojo igual a cero. Se tiene entonces: $v_0 = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}$:

$$t_0 \approx t_{mv0} + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \times \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{\infty}^{\frac{v_0}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}}} \frac{v^3 dv}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (64)$$

donde t_{mv0} está dado por la ecuación (40). La última integral se puede dividir en dos integrales que se pueden resolver sólo de manera numérica:

$$t_0 \approx t_{mv0} + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \times \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (65)$$

Reemplazando el valor de t_{mv0} , se encuentra el valor analítico de la edad del universo en el momento actual considerando la contribución de todas las densidades cosmológicas:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (66)$$

Considerando que $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} \approx 1$ y tomando el valor principal de $\Omega_{v0} = 0,685$ [14, 19] el valor de las integrales es, calculado con la ayuda de Wolfram Alpha:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{1 + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\Omega_{r0}}{2H_0 \Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} [1,805841]. \quad (67)$$

En la tabla (1) se muestran valores numéricos de algunas edades del universo variando el parámetro H_0 , y consecuentemente también Ω_{r0} , con $\Omega_{v0} = 0,685$ y $\Omega_{m0} = 0,315$ [22]. Nótese que la corrección es relevante ya en el tercer decimal... ¡La corrección es del orden de los millones de años!

4 Cálculo del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición

En un momento en la vida del universo temprano ocurrió una transición en donde el dominio de la densidad cosmológica de la materia siguió al dominio de la densidad correspondiente a la radiación. Durante la transición, sin embargo, existió un momento en el cual la densidad de energía de materia fue igual a la densidad de energía de la radiación, mientras que en comparación la densidad de energía del vacío era completamente despreciable. Al parámetro de corrimiento hacia el rojo evaluado en ese momento lo llamaremos z_{eq} , y ocurrió aproximadamente 380000 años después de la Gran Explosión [23, 2]. Usaremos de nuevo la ecuación (50) con el límite superior de la integral igual a z_{eq} , $\Omega_{v0} = 0$, $\Omega_{T0} = 1$ y definiendo el parámetro $b = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}$:

$$t_{eq} = - \int_{\infty}^{z_{eq}} \frac{dz}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} (1+z)^{\frac{5}{2}} \{1+b(1+z)\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (68)$$

Se usa el cambio de variable $u = 1+z$, con lo cual $u_{eq} = 1+z_{eq}$ y por lo tanto

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0} \int_{\infty}^{u_{eq}-1} \frac{1}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}(u)^{\frac{5}{2}} \{1+bu\}^{\frac{1}{2}}} du$$

Esta integral tiene solución analítica, la cual es, en términos de z :

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{2\sqrt{1+b(1+z)} (2b(1+z) - 1)}{3(1+z)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\infty}^{z_{eq}}$$

Evaluando en los límites:

Ω_{m0}	$t_{eq}[\text{yr}]$	$H_0[\text{Km}/(\text{s Mpc})]$	z_{eq}
0.315	380000	65.3	908.77534
0.315	380000	66.3	899.60412
0.315	380000	67.3	890.66059
0.315	380000	68.3	881.93584
0.315	380000	69.3	873.42142

Tabla 2: Valores numéricos de z_{eq} para diversos H_0 y Ω_{m0} experimentales[14, 19].

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2\sqrt{1+b(1+z_{eq})}(2b(1+z_{eq}))}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} - \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\sqrt{1+b(1+z_{eq})}}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (69)$$

Sin embargo, Lo que se quiere es encontrar z_{eq} en función del tiempo de equilibrio. La última relación se puede escribir:

$$\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} - t_{eq} \right] = [2b(1+z_{eq}) - 1] \left[\sqrt{\frac{1+b(1+z_{eq})}{(1+z_{eq})^3}} \right]. \quad (70)$$

Ya que $b = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}}$, y $\rho_r = \rho_r \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$, $\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3$ entonces $b = \frac{R}{R_0} \frac{\rho_r}{\rho_m}$. Por otro lado, recordando que $R = \frac{R_0}{1+z}$, tenemos que $b = \frac{1}{1+z} \frac{\rho_r}{\rho_m}$. En el momento en que las densidades de energía de materia y radiación son iguales podemos escribir $b_{eq} = \frac{1}{1+z_{eq}}$. Reemplazando esto en la ecuación (70):

$$\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} - t_{eq} \right] = \left[\sqrt{\frac{2}{(1+z_{eq})^3}} \right]. \quad (71)$$

De la última ecuación obtenemos:

$$z_{eq} = \left[\frac{2(2-\sqrt{2}) H_0^{-1} (\Omega_{m0})^{-\frac{1}{2}}}{3t_{eq}} \right]^{\frac{2}{3}} - 1 \quad (72)$$

En la tabla (2) se encuentran valores del parámetro de corrimiento hacia el rojo en el momento en que las densidades de energía de la materia y de la radiación eran iguales para diversos H_0 .

5 Conclusiones

La Teoría General de la Relatividad (TGR) se resume en 14 ecuaciones: Las ecuaciones de campo de Einstein (10

Ω_{r0}	$H_0[\text{Km}/(\text{s Mpc})]$	$t_0[\text{Gyr}]$	Corr.[Gyr]	$t_{mv0}[\text{Gyr}]$
5.792×10^{-5}	65.3	14.24778	0.00389	14.25167
5.619×10^{-5}	66.3	14.03299	0.00372	14.03671
5.453×10^{-5}	67.3	13.82459	0.00355	13.82814
5.294×10^{-5}	68.3	13.62228	0.00340	13.62568
5.143×10^{-5}	69.3	13.42580	0.00325	13.42906

Tabla 1: Valores de la edad del universo tanto para un universo en donde se considera la contribución de la densidad cosmológica de radiación (t_0) como para uno en el que no (t_{mv0}) para diversos valores de la constante de Hubble. Los valores experimentales han sido tomados de [19].

ecuaciones) y las ecuaciones de las geodésicas (4 ecuaciones) [2, 8, 10]. Utilizando las ecuaciones de campo, se puede determinar la métrica del espacio-tiempo para una distribución dada de materia o energía. Por ejemplo, la geometría del espacio-tiempo de un universo isótropo y homogéneo en expansión está dada por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. La mencionada métrica, al ser introducida en las ecuaciones de campo de Einstein, da origen a las ecuaciones de Friedmann. En el caso del modelo de Lemaitre para un universo plano ($K = 0$), a partir de dichas ecuaciones, se puede calcular como el factor de escala del universo varía en el transcurso del tiempo y deducir una expresión para la edad del universo sin tomar en cuenta la contribución de la densidad de energía de la radiación.

La densidad cosmológica debido a la radiación es cuatro órdenes de magnitud menor a las correspondientes a la materia y al vacío. No es sorprendente entonces que el término que considera la densidad de energía de radiación sea despreciado generalmente en comparación con las otras dos densidades de energía. Sin embargo, en aras de analizar el modelo de Lemaitre en forma más completa, hemos calculado la corrección a primer orden dada al considerar la contribución debido a la densidad cosmológica de la radiación.

La expresión analítica de la edad del universo en el momento actual la hemos calculado a partir de una ecuación que relaciona el tiempo con el parámetro de corrimiento hacia el rojo y las densidades cosmológicas (ver ecuación 50). En primer orden, el valor analítico de la edad del universo en el momento actual tomando en cuenta la contribución de todas las densidades de energía es: (ver ecuación 66)

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0 \Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

El primer término de la suma representa la edad del universo en el modelo donde se desprecia la contribución

de la radiación y que se puede encontrar en la literatura (ver referencia [2, 18, 14, 12]), mientras el segundo término representa la corrección debido precisamente a dicha radiación. Nótese que el segundo término es directamente proporcional a Ω_{r0} , el cual es del orden de 10^{-5} . Por lo tanto, la magnitud de la corrección es efectivamente pequeña en comparación con el término principal. En la tabla (1) se muestran algunos valores para la edad del universo en el momento actual para ciertos valores del parámetro de Hubble H_0 y la densidad cosmológica de la radiación Ω_{r0} . La corrección está entre los $0,00325[\text{Gyr}]$ para el valor superior de H_0 , y los $0,00389[\text{Gyr}]$ para el valor inferior de H_0 . La contribución de la radiación disminuye en aproximadamente tres millones de años la edad del universo en el momento actual.

Adicionalmente calculamos el valor del parámetro de corrimiento hacia el rojo (z_{eq}) en el momento en que la densidad de energía de la materia se hizo igual a la densidad de energía de la radiación, es decir cuando materia y radiación se desacoplaron y el universo se hizo transparente a la luz. Para ello se utilizó la ecuación (50) despreciando el valor de la densidad cosmológica del vacío. Ya que se tiene una buena estimación de la edad del universo cuando existió este equilibrio entre materia y radiación ($t_{eq} \approx 380000$ años), el valor de z_{eq} resultó ser (ver ecuación 72)

$$z_{eq} = \left[\frac{2(2 - \sqrt{2}) H_0^{-1} (\Omega_{m0})^{-\frac{1}{2}}}{3t_{eq}} \right]^{\frac{2}{3}} - 1$$

En la tabla (2) se ilustran los valores de z_{eq} para diferentes valores del parámetro de Hubble H_0 . Vemos que aproximadamente, el parámetro de corrimiento hacia el rojo para dicha época era alrededor de 900.

Referencias

- [1] Weinberg, S. 2008. "Cosmology" Oxford University Press.
- [2] Marn, C. 2011. "La Expansión del Universo, Una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas, Segunda Edición", USFQ, Quito-Ecuador.
- [3] Hawking, S. 1998. "A Brief History of Time", Bantam Books.
- [4] Perlmutter, S. et al. 1998. "Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe", Nature 391, p. 51.

- [5] Perlmutter, S. et al. 1999. “*Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift Supernovae*”, *Astrophys.J.* 517, p. 565-586.
- [6] Perlmutter, S. 2003. “*Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe*”, *Physics Today* 56 (4), p. 53-59.
- [7] Schmidt, B. et al. 1998. “*High-Z-Supernova Search*”, *Astrophys. J.* 507, p.46
- [8] Kenyon, I. R. 1996. “*General Relativity*”. Oxford University Press, Oxford , UK.
- [9] Ohanian, H. C. 1976. “*Gravitation and Spacetime*”. W. W. Norton Company, Inc.
- [10] Misner, C. W.; Thorne, K.S. and Wheeler, J. A. 1973. “*Gravitation*”, W. H. Freeman & Company, NY, NY.
- [11] Cheng, T. P. 2005. “*Relativity, Gravitation and Cosmology. A Basic Introduction*”, Oxford University Press.
- [12] Kolb, E. W., Turner, M. S. 1994. “*The Early Universe*”, Addison Wesley.
- [13] Marín, C. 2001. “*El Origen del Universo*”, Producciones Digitales Abya-Yala.
- [14] Olive, K. A. et al. (Particle Data Group) 2014. “*Review of Particle Physics*”, *Chinese Physics C.* 38, No.9.
- [15] Gliner, E. B. 1966. *Sov. Phys. JETP.* 22.
- [16] Zeldovich, Y. B. 1968. *Sov. Phys. USP.* 11.
- [17] Weinberg, S. 1972. “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley Sons, Inc.
- [18] Hobson, M. P. , Efstathiou, G. P. and Lasenby, A. N. 2006. “*General Relativity. An Introduction for Physicists*”, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [19] Ade, P. A. R. et al. (Planck Collaboration). 2014. “*Planck 2013 results. XVI. Cosmological Parameters*”, arXiv:1303.5076(astro-ph.CO).
- [20] Hoyle, P. 2006. “*Relativistic Astrophysics and Cosmology, A primer*”, Springer Verlag.
- [21] Peacock, J. A. 1999. “*Cosmological Physics*”, Cambridge University Press.
- [22] Lahav, O. , Liddle, A. R. 2014. “*The Cosmological Parameters*”, *Chinese Physics C.* 38, No.9, p. 345-352.
- [23] Guth, A. H. 1997. “*The Inflationary Universe*”, Addison Wesley.