

## Agujeros de gusano: solución exponencial

Carlos A. Marín<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>*Colegio de Ciencias e Ingeniería - El Politécnico, Universidad San Francisco de Quito.  
Diego de Robles y Vía Interoceánica, Quito, Ecuador*

*\*Autor principal/Corresponding author, e-mail: cmarin@usfq.edu.ec*

Editado por/Edited by: C. Montúfar, Ph.D.

Recibido/Received: 01/09/2010. Aceptado/Accepted: 04/15/2010.

Publicado en línea/Published on Web: 06/10/2010. Impreso/Printed: 06/01/2010.

### Abstract

The fundamental properties of the Morris-Thorne wormholes are reviewed, together with the energy conditions (NEC, WEC, SEC, DEC) for the same. A new exponential solution for the equations derived by Morris and Thorne is introduced and, finally, we have calculated the total time to traverse a wormhole with exponential shape function.

**Keywords.** Wormhole, general relativity, hyperspace, Einstein.

### Resumen

Se revisan las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano del tipo Morris-Thorne, así como las condiciones de energía (NEC, WEC, SEC, DEC) para dichos agujeros. Se introduce una nueva solución de carácter exponencial para las ecuaciones derivadas por Morris y Thorne para los mencionados agujeros y, finalmente, se procede a calcular el tiempo que se demoraría un viajero en atravesar un agujero de gusano con función de forma exponencial.

**Palabras Clave.** Agujeros de gusano, relatividad general, hiperespacio, Einstein.

### Introducción

Un agujero de gusano (wormhole) es un túnel en el hiperespacio que conecta dos puntos en el universo [1, 2] (el hiperespacio es un espacio plano hipotético con más de tres dimensiones espaciales, en el que está contenido el espacio curvo de nuestro universo). El wormhole tiene dos entradas llamadas "bocas". Las bocas están conectadas por un túnel a través del hiperespacio que puede ser muy corto (digamos unos pocos kilómetros de largo). Las bocas de un agujero de gusano se parecen al horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild [2, 3, 4, 5, 6], con una diferencia importante: el horizonte de sucesos de un agujero negro es, si despreciamos los efectos cuánticos, una superficie de una sola vía; cualquier cosa puede entrar en el agujero, sin embargo nada puede escapar. Por el contrario, las bocas de un wormhole son superficies que pueden ser cruzadas en ambas direcciones, hacia adentro del agujero de gusano y de regreso hacia el "universo externo" (nuestro universo).

Los wormholes fueron descubiertos matemáticamente como una solución a las ecuaciones de campo de Eins-

tein en 1935, en un artículo de Albert Einstein y Nathan Rosen publicado en la revista Physical Review, en el que trataban de hallar una conexión (un puente) entre los agujeros negros y los agujeros blancos [7]. John Archibald Wheeler junto con su equipo de investigación los estudiaron profundamente en los años 50 y desde 1985 son el objeto de estudio de numerosos científicos alrededor del mundo, tales como Kip S. Thorne, Mike Morris, Don Page y otros.

Supongamos que queremos viajar desde la Tierra hasta algún lugar muy cercano a la estrella Betelgeuse ubicada a 424 años luz de nosotros [8]. Si el viaje se lo realiza a través del "universo externo" (a través de nuestro universo), tomaría 424 años viajando a la velocidad de la luz o a una velocidad próxima a la misma. Sin embargo, el viaje sería muy corto si se lo realizara a través de un túnel en el hiperespacio conectando la Tierra con Betelgeuse (es decir un wormhole). Si nosotros entráramos a través de la boca del wormhole cercana a la Tierra, nos encontraríamos con un túnel. Viajando tan sólo unos pocos kilómetros a lo largo de éste, alcanzaríamos la otra boca y emergeríamos cerca de Betelgeuse como se ilustra en la figura que sigue a continuación. En este

diagrama, el espacio de nuestro universo es representado en dos dimensiones y las bocas del wormhole son círculos. Sin embargo, en nuestro universo tridimensional las bocas tendrían en realidad forma esférica.

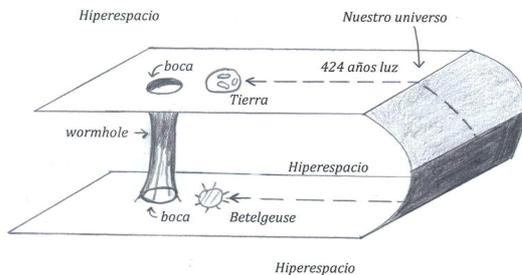


Figura 1: Hiperespacio.

De acuerdo con las ecuaciones de campo de Einstein, el tiempo de vida de un wormhole es en promedio muy pequeño, por lo que nada en absoluto ( persona, radiaciones, señal de cualquier clase) puede viajar a través del túnel del agujero de gusano. La única manera de mantener abierto el agujero por un tiempo mucho mayor es mediante la presencia de algún tipo de material "exótico", a lo largo del wormhole, que empuje sus paredes gravitacionalmente, manteniéndolas separadas. Al material se le denomina "exótico", porque como Kip Thorne demostrara en 1985, debe tener una densidad de energía promedio negativa, con respecto a un haz de luz viajando a través del agujero de gusano. El material "exótico" repele gravitacionalmente los rayos de luz por lo que los haces luminosos se desenfocan, como se ilustra en la figura a continuación.

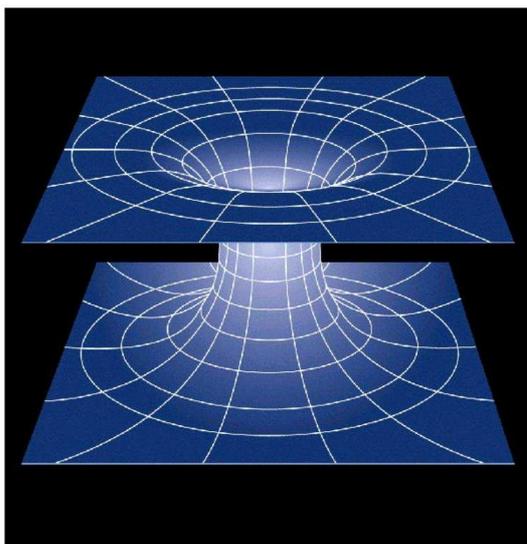


Figura 2: Wormhole.

El que la densidad de energía promedio sea negativa no implica que el material exótico tenga una energía negativa con respecto a un observador en reposo en el interior del agujero de gusano. El concepto de densidad de energía es relativo al sistema de referencia utilizado; en un sistema de referencia puede ser positiva, y en otro, puede ser negativa.

Nadie sabe exactamente de qué puede estar hecho el material exótico. Robert Wald [1] ha probado que en un espacio-tiempo curvo, bajo una amplia variedad de circunstancias, la curvatura distorsiona las fluctuaciones del vacío de carácter gravitacional convirtiéndolas en exóticas debido a que su densidad de energía promedio se hace negativa. Dichas fluctuaciones del vacío son análogas a las fluctuaciones del vacío de naturaleza electromagnética. Son fluctuaciones aleatorias en la curvatura del espacio causadas porque regiones del espacio, están continuamente tomando energía de regiones adyacentes para luego devolverla. Bajo circunstancias ordinarias las fluctuaciones son tan pequeñas que ningún científico las ha podido detectar hasta ahora. Otra posibilidad es que el material exótico esté formado por energía oscura que como sabemos, tiene densidad de energía negativa y es el 74 % de la energía del universo.

En el presente artículo revisaremos las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano del tipo Morris-Thorne (secciones 1 a 14 ) [9], analizaremos las condiciones de energía en dichos agujeros, presentaremos una nueva solución para las ecuaciones derivadas por Morris-Thorne para los mencionados agujeros y, finalmente, calcularemos el tiempo que se demoraría un viajero en atravesar un wormhole.

## 1 Propiedades fundamentales

Un agujero de gusano practicable (a través del cual se pueda viajar) debe satisfacer algunas propiedades básicas, las cuales están enumeradas en el artículo de Morris y Thorne [9] y que las reproducimos a continuación:

- “1. La métrica debe tener simetría esférica y debe ser independiente del tiempo.
- 2.- Las soluciones deben satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein.
- 3.- Para que la solución represente un agujero de gusano, debe tener una garganta (throat) conectando dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
- 4.- El wormhole no puede tener un horizonte de sucesos, ya que este impediría el viaje en ambas direcciones a través del mismo.
- 5.- Las fuerzas de marea gravitacionales que experimenta el viajero deben ser tolerables.

6.- Un viajero debe ser capaz de atravesar el wormhole en un tiempo propio finito y razonablemente pequeño, no solamente medido por el, sino por cualquier otro observador dentro o fuera del agujero.

7.- La distribución de materia-energía y los campos que generan la curvatura del espacio-tiempo del agujero de gusano deben tener un tensor de energía-esfuerzo físicamente razonable.

8.- La solución debería ser perturbativamente estable.

9.- Debería ser posible construir el wormhole, pero siempre que su construcción requiera mucha menos masa que la del universo y que ello requiera de un tiempo mucho menor que la edad del universo.”

Morris y Thorne han denominado a las propiedades 1 al 4 "criterios básicos de un agujero de gusano", mientras que a los enunciados 5 al 9 los han denominado "criterios de uso del wormhole".

## 2 Métricas

En el artículo de Morris y Thorne se consideran dos métricas:

i)

$$(ds)^2 = e^{2\Phi} c^2 (dt)^2 - f(r) (dr)^2 - r^2 (d\Omega)^2 \quad (1)$$

donde  $s$  representa el elemento de arco.  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son las coordenadas esféricas de un punto y  $t$  es el tiempo coordenado medido por un observador remoto en reposo.  $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$

$f(r) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}$ . A  $b(r)$  se le denomina función de forma del agujero de gusano, y determina la forma espacial del mismo. La función  $\Phi = \Phi(r)$  se denomina función de corrimiento hacia el rojo.

ii)

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dl)^2 - (l^2 + b_0^2) (d\Omega)^2 \quad (2)$$

donde  $-\infty < l < \infty$  es la distancia propia medida de dirección radial,  $b_0$  es una constante y  $t$  es el tiempo coordenado.

Nosotros, fijemos nuestra atención únicamente en la primera métrica y a continuación deduciremos las ecuaciones de campo correspondientes a la misma. En un próximo artículo se estudiará en detalle la métrica ii).

## 3 Símbolos de Christoffel y Tensor de Riemann-Christoffel

Para la métrica (1), el cuadrado del elemento de arco  $(ds)^2$  se puede escribir:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3)$$

$$\text{donde } g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

El tensor contravariante correspondiente es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(f(r))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{bmatrix}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie son:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right\} \quad (4)$$

donde  $x^\mu$  es el cuadrivector posición de la partícula. Las letras griegas como:  $\mu, \sigma, \rho$ , etc. toman los valores 0, 1, 2 y 3. Hemos adoptado la convención de suma de Einstein en la que se suma sobre índices que se repiten dos veces.

En coordenadas esféricas  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \varphi$ .

Dichos símbolos se pueden calcular facilmente usando el teorema:

Si  $g_{\mu\nu} \neq 0$  para  $\mu \neq \nu$

a)  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0 \forall \mu \neq \nu \neq \rho$ ,

b)  $\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\mu}$  para  $\mu$  fijo,

c)  $\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$  para  $\mu \neq \nu$  fijos,

d)  $\Gamma_{\nu\nu}^\mu = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\mu}$  para  $\mu \neq \nu$  fijos,

El resultado es que los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{[b(r) - rb'(r)]}{2r^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} \quad (5)$$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \Phi'(r) \quad (6)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (7)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (8)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \quad (9)$$

$$\Gamma_{00}^1 = e^{2\Phi} \Phi' \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \quad (10)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r + b(r) \quad (11)$$

$$\Gamma_{33}^1 = (-r + b(r)) \sin^2 \theta \quad (12)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{\sin(2\theta)}{2} \quad (13)$$

donde  $b'(r) \equiv \frac{db}{dr}$  y  $\Phi'(r) = \frac{d\Phi}{dr}$ . El tensor de Riemann-Christoffel está dado por la expresión:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma_{\nu\rho}^\mu) + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \quad (14)$$

Las 24 componentes de dicho tensor diferentes de cero son:

$$R_{101}^0 = -R_{110}^0 = -\Phi''(r) - (\Phi'(r))^2 + \frac{(rb'(r) - b)\Phi'(r)}{2r(r-b)} \quad (15)$$

$$R_{202}^0 = -R_{220}^0 = \Phi'(r)(b-r) \quad (16)$$

$$R_{303}^0 = -R_{330}^0 = \Phi'(-r+b)\sin^2\theta \quad (17)$$

$$R_{010}^1 = -R_{001}^1 = e^{2\Phi}[\Phi''\left(1 - \frac{b}{r}\right) + (\Phi')^2\left(1 - \frac{b}{r}\right) + \Phi'\left(\frac{b-rb'}{2r^2}\right)] \quad (18)$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = \frac{(rb' - b)}{2r} \quad (19)$$

$$R_{121}^2 = -R_{112}^2 = \frac{(rb' - b)}{2r^2(r-b)} \quad (20)$$

$$R_{313}^1 = -R_{331}^1 = \frac{(rb' - b)\sin^2\theta}{2r} \quad (21)$$

$$R_{131}^3 = -R_{113}^3 = \frac{(rb' - b)}{2r^2(r-b)} \quad (22)$$

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = \frac{b}{r}\sin^2\theta \quad (23)$$

$$R_{232}^3 = -R_{223}^3 = \frac{b}{r} \quad (24)$$

$$R_{020}^2 = -R_{002}^2 = e^{2\Phi}\Phi'\frac{(r-b)}{r^2} \quad (25)$$

$$R_{030}^3 = -R_{003}^3 = e^{2\Phi}\Phi'\frac{(r-b)}{r^2} \quad (26)$$

Para el cálculo de las componentes nulas, hemos usado propiedades tales como:

$$R_{\nu\rho\rho}^\mu = 0 \text{ para } \rho \text{ fijo} \quad (27)$$

$$R_{\mu\rho\sigma}^\mu = 0 \text{ para } \mu \text{ fijo y } g_{\mu\nu} \text{ diagonal, etc} \quad (28)$$

#### 4 Marco de referencia propio

Consideremos dos sistemas de referencia, al uno lo llamaremos sistema de referencia no primado y al otro sistema primado. Sea  $\{\vec{e}_\alpha\}$  con  $\alpha = 0, 1, 2$  y  $3$  la base de vectores asociada al sistema de referencia no primado, y  $\{\vec{e}'_\alpha\}$  la base de vectores asociada al sistema primado ( $\vec{e}_\alpha, \vec{e}'_\alpha$ , son vectores en el espacio-tiempo, es decir, tienen cuatro componentes). Un vector  $\vec{A}$  en el espacio tiempo se puede escribir:

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \text{ en la base } \{\vec{e}_\alpha\},$$

$$\vec{A} = A'^\mu \vec{e}'_\mu \text{ en la base } \{\vec{e}'_\mu\}$$

de manera que  $A^\alpha \vec{e}_\alpha = A'^\mu \vec{e}'_\mu$ . Si  $A'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha$ , entonces podemos escribir:

$$A^\alpha (\Lambda^\mu_\alpha \vec{e}'_\mu - \vec{e}_\alpha) = \vec{0}$$

ya que  $A^\alpha$  representan las componentes de un vector arbitrario, tenemos:

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^\mu_\alpha \vec{e}'_\mu \quad (29)$$

y también, si  $\Lambda$  es una matriz invertible:

$$\vec{e}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \vec{e}_\alpha \quad (30)$$

Sea  $\{\vec{e}_\alpha\}$  la base ortogonal de vectores asociada con las coordenadas  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \varphi$ . Introduzcamos una base ortonormal de vectores  $\{\vec{e}'_\mu\}$  definidos por:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_0 \\ \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

donde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{b}{r})^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin\theta \end{pmatrix}$$

Es fácil demostrar que

$$g'_{\alpha\beta} \equiv \vec{e}'_\alpha \cdot \vec{e}'_\beta = \eta_{\alpha\beta} = \text{diagonal}(1, -1, -1, -1) \quad (32)$$

Esta base nos permite introducir un nuevo sistema de coordenadas del marco de referencia propio "proper reference frame":

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (33)$$

o:

$$x'^0 = e^\Phi x^0 \quad (33a)$$

$$x'^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} x^1 \quad (33b)$$

$$x'^2 = r x^2 \quad (33c)$$

$$x'^3 = r \sin\theta x^3 \quad (33d)$$

Estas son las coordenadas de un conjunto de observadores que siempre permanecen en reposo en el campo gravitacional del agujero de gusano. Es decir que tienen:

$$r, \theta \text{ y } \varphi \text{ constantes}$$

En esta nueva base, las componentes del tensor de Riemann-Christoffel se pueden calcular a partir de la relación:

$$R'{}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha_3}}{\partial x'^{\sigma}} \times \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} R^{\beta}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad (34)$$

El resultado es que las 24 componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} R'{}^0{}_{101} &= -R'{}^0{}_{110} \\ &= -R'{}^1{}_{010} \\ &= R'{}^1{}_{001} \\ &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) [-\Phi'' - (\Phi')^2 + \\ &\quad \frac{(rb' - b)}{2r(r - b)} \Phi'] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} R'{}^0{}_{202} &= -R'{}^0{}_{220} = -R'{}^2{}_{020} = R'{}^2{}_{002} \\ &= R'{}^0{}_{303} = -R'{}^0{}_{330} = -R'{}^3{}_{030} \\ &= R'{}^3{}_{003} = \frac{(b - r)}{r^2} \Phi' \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} R'{}^1{}_{212} &= -R'{}^1{}_{221} = R'{}^2{}_{121} = -R'{}^2{}_{112} \\ &= R'{}^1{}_{313} = -R'{}^1{}_{331} = R'{}^3{}_{131} \\ &= -R'{}^3{}_{113} = \frac{(rb' - b)}{2r^3} \end{aligned} \quad (37)$$

$$R'{}^2{}_{323} = -R'{}^2{}_{332} = R'{}^3{}_{232} = -R'{}^3{}_{223} = \frac{b}{r^3}. \quad (38)$$

### 5 Tensor y escalar de Ricci

El tensor de Ricci se define por la expresión

$$R'{}_{\mu\nu} \equiv R'{}^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \quad (39)$$

Las componentes no nulas de dicho tensor son:

$$\begin{aligned} R'{}_{00} &= \Phi'' \left(1 - \frac{b}{r}\right) + (\Phi')^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\quad + \left(\frac{b - rb'}{2r^2}\right) \Phi' + \frac{2(r - b)}{r^2} \Phi' \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} R'{}_{11} &= -\Phi'' \left(1 - \frac{b}{r}\right) - (\Phi')^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\quad + \left(\frac{rb' - b}{2r^2}\right) \Phi' + \frac{(rb' - b)}{r^3} \end{aligned} \quad (41)$$

$$R'{}_{22} = R'{}_{33} = \frac{(b - r)}{r^2} \Phi' + \frac{(rb' - b)}{2r^3} + \frac{b}{r^3} \quad (42)$$

El escalar de Ricci es:

$$R' = g'^{\mu\nu} R'{}_{\mu\nu} = R'{}_{00} - R'{}_{11} - R'{}_{22} - R'{}_{33} \quad (43)$$

Introduciendo (40-42) en (43) tenemos:

$$\begin{aligned} R' &= 2\Phi'' \left(1 - \frac{b}{r}\right) + 2(\Phi')^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\quad + \left(\frac{b - rb'}{r^2}\right) \Phi' - 2\frac{(rb' - b)}{r^3} \\ &\quad - \frac{4(b - r)}{r^2} \Phi' - \frac{2b}{r^3} \end{aligned} \quad (44)$$

### 6 Tensor de Einstein

Las componentes no nulas del tensor de Einstein [3, 4, 5, 6]

$$G'{}_{\mu\nu} = R'{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R' g'{}_{\mu\nu}$$

son:

$$G'{}_{00} = \frac{b'}{r^2} \quad (45)$$

$$G'{}_{11} = -\frac{2(b - r)}{r^2} \Phi' - \frac{b}{r^3} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} G'{}_{22} = G'{}_{33} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) [\Phi'' + (\Phi')^2 \\ &\quad + \frac{\Phi'}{r} + \frac{(b - rb')}{2r(r - b)} \Phi' \\ &\quad - \frac{(rb' - b)}{2r^2(r - b)}] \end{aligned} \quad (47)$$

### 7 Ecuaciones de Campo de Einstein y tensor energía-momentum

De acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein [3, 4, 5, 6]

$$G'{}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T'{}_{\mu\nu}, \quad (48)$$

los tensores de Einstein  $G'{}_{\mu\nu}$  y de energía-momentum  $T'{}_{\mu\nu}$ , son proporcionales. Ello implica que las únicas componentes no nulas de  $T'{}_{\mu\nu}$  son  $T'{}_{00}$ ,  $T'{}_{11}$  y  $T'{}_{22} = T'{}_{33}$ , donde:

$$T'{}_{00} = \rho(r) c^2 \quad (49)$$

$$T'{}_{11} = -\tau(r) \quad (50)$$

$$T'_{22} = T'_{33} = P(r) \quad (51)$$

En la ecuación (49)  $\rho(r)$  es la densidad de total de masa-energía medida por un observador estático en el campo gravitacional del agujero de gusano,  $\tau(r)$  es la tensión por unidad de área medida por dichos observadores en la dirección radial (es el negativo de la presión radial), y  $P(r)$  es la presión medida en las direcciones laterales (ortogonales a la dirección radial). En el fluido perfecto  $P(r) = -\tau(r)$ .

A partir de (48) podemos escribir:

$$G'_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T'_{00}$$

usando las ecuaciones (45) y (49), podemos demostrar que:

$$b'(r) = k r^2 \rho(r) c^2 \quad (52)$$

donde

$$k = 8\pi G/c^4$$

La ecuación (48) para  $\mu = \nu = 1$  da:

$$\Phi' = \frac{(b - kr^3 \tau)}{2r(r-b)} \quad (53)$$

por otro lado,

$$\Phi'' = \frac{1}{2r(r-b)} [b' - kr^2 (3\tau + r\tau') - \Phi' (4r - 2b - 2rb')] \quad (54)$$

La ecuación (48) para  $\mu = \nu = 2$  nos da:

$$G'_{22} = kP(r) \quad (55)$$

de manera que si introducimos (54) en (47), a partir de la ecuación (55) obtenemos:

$$\tau' = \Phi' (\rho(r) c^2 - \tau) - \frac{2}{r} (P(r) + \tau(r)) \quad (56)$$

La ecuación (56) es la ecuación de equilibrio hidrostático para el materia del que está constituido el agujero de gusano.

Las ecuaciones (52), (53) y (56) también se pueden escribir:

$$\rho(r) c^2 = \frac{b'}{kr^2} \quad (57)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{kr^2} \left[ \frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right] \quad (58)$$

$$P(r) = -\tau(r) + \frac{r}{2} \times [\Phi' (\rho(r) c^2 - \tau) - \tau'] \quad (59)$$

Las últimas tres ecuaciones junto con las ecuaciones de estado

$$P = P(\rho) \quad \text{y} \quad \tau = \tau(\rho) \quad (60)$$

constituyen un sistema de cinco ecuaciones con cinco funciones incógnitas:

$$\rho, \tau, P, \Phi \text{ y } b.$$

Para hallar una solución a dichas ecuaciones, nosotros usaremos la misma filosofía de Morris y Thorne [9], probando con funciones  $b(r)$  y  $\Phi(r)$  que nos permitan construir un agujero de gusano apropiado para un viaje interestelar.

## 8 Condiciones de borde y ausencia de un horizonte de sucesos

Consideraremos que el agujero de gusano está confinado en el interior de una esfera de radio  $r = R_S$  de manera que para  $r > R_S$   $\rho$ ,  $\tau$  y  $P$  son iguales a cero. Por otro lado supondremos que en el límite cuando  $r \rightarrow R_S$ ,  $\tau \rightarrow 0$  pero  $\rho$  y  $P$  permanecen finitos.

Ya que para  $r > R_S$ ,  $\rho = 0$ , la ecuación (52) nos dice que  $b' = 0$ . Por lo tanto:

$$b(r) = b(R_S) = D = \text{constante} \quad (61)$$

Adicionalmente,  $\tau = 0$  para  $r > R_S$  implica (ecuación (53)):

$$2\Phi' r (r - b) = b \quad (62)$$

de donde tenemos  $\Phi' = D/2r(r - D)$ .

Integrando la anterior ecuación y teniendo en cuenta que  $\Phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\Phi(r > R_S) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{D}{r} \right) \quad (63)$$

Otra condición que debe cumplirse es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (b/r) = 0 \tag{64}$$

ya que el espacio tiempo debe ser asintóticamente plano lejos del campo gravitacional del wormhole. En efecto, la métrica (1) para  $r > R_S$  se escribe:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \left(1 - \frac{D}{r}\right) c^2 (dt)^2 \\ &- \left(1 - \frac{D}{r}\right)^{-1} (dr)^2 \\ &- r^2 (d\Omega)^2 \end{aligned} \tag{65}$$

que es la métrica de Schwarzschild si hacemos  $\gamma = 1 - D/r$  (ver referencias [3, 4, 5, 6]).

Matemáticamente, los horizontes de sucesos, en un espacio descrito por una métrica estática y asintóticamente plana, se obtienen haciendo  $g_{00} \rightarrow 0$ . Para nuestra métrica (1) tendríamos:

$$g_{00} = e^{2\Phi} \rightarrow 0 \tag{66}$$

o  $\Phi \rightarrow -\infty$ , de manera que la condición fundamental de que el agujero de gusano practicable no deba tener ningún horizonte de sucesos, solo se puede cumplir si la función  $\Phi(r)$  es finita en cualquier punto del espacio.

### 9 Parámetro de corrimiento hacia el rojo

Consideremos una fuente en el agujero de gusano que emite pulsos de luz de energía  $E'$ . Para un observador distante (muy alejado del campo gravitacional del agujero), la energía que recibe de los pulsos de luz ( $E$ ) será:

$$E = (g_{00})^{1/2} E' \tag{67}$$

donde  $E = hc/\lambda_{recibida}$  y  $E' = hc/\lambda_{emitida}$  ( $\lambda_{emitida}$  y  $\lambda_{recibida}$  son las longitudes de onda de las señales emitida y recibida, respectivamente).

El parámetro de corrimiento hacia el rojo se define a través de la relación:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{recibida} - \lambda_{emitida}}{\lambda_{emitida}} \\ &= \frac{\lambda_{recibida}}{\lambda_{emitida}} - 1 \end{aligned} \tag{68}$$

Usando la ecuación (67), tenemos:

$$z = e^{-\Phi} - 1 \tag{69}$$

Por esta razón, la función  $\Phi(r)$  se denomina función de corrimiento hacia el rojo gravitacional.

### 10 Superficies de inserción (embedding surfaces)

Para un tiempo fijo  $t$  y tomando  $\theta = \pi/2$  (plano ecuatorial), la parte espacial de la métrica (1) se puede escribir:

$$\begin{aligned} (ds')^2 &= -(ds)^2 = f(r) (dr)^2 \\ &+ r^2 (d\varphi)^2 \end{aligned} \tag{70}$$

que representa un elemento de arco en el plano ecuatorial. Deseamos construir en el espacio Euclideo tridimensional, una superficie bidimensional que tenga la misma geometría que la del elemento de arco descrito por (70). Entonces, uno podría encajar la geometría del espacio curvo bidimensional en la geometría plana de un espacio Euclideo tridimensional [10]. En dicho espacio Euclideo, introduciremos coordenadas cilíndricas  $z, r$  y  $\varphi$ . La métrica Euclidea del espacio de inserción (embedding space) es:

$$\begin{aligned} (ds_{Euclidean})^2 &= \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) (dr)^2 \\ &+ r^2 (d\varphi)^2 \end{aligned} \tag{71}$$

En (71), nosotros suponemos que  $z = z(r)$  (consideramos que la superficie insertada tiene simetría axial).

Si nosotros identificamos las coordenadas  $(r, \varphi)$  del espacio Euclideo con las coordenadas  $(r, \varphi)$  del espacio-tiempo del agujero de gusano, el elemento de arco (71) será el mismo que el descrito por la ecuación (70) a través del wormhole. Podemos entonces escribir:

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} \tag{72}$$

de donde obtenemos:

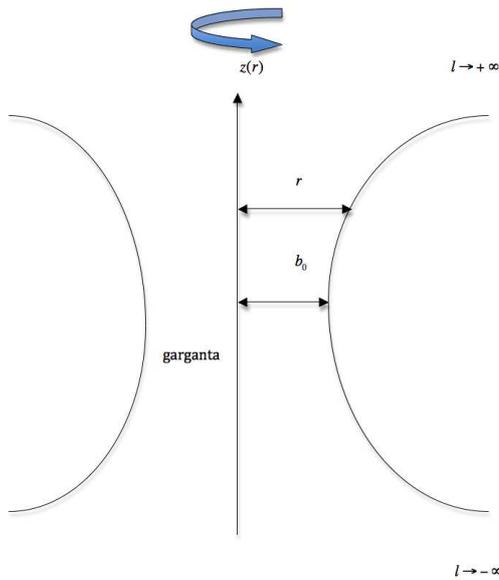
$$\left(\frac{dz}{dr}\right) = \pm \left(\frac{r}{b} - 1\right)^{-1/2} \tag{73}$$

La ecuación (73) describe la forma en la que la función  $b(r)$  modela la geometría espacial del agujero de gusano.

Todo agujero de gusano tiene un radio mínimo  $r = b_0$  para el cual la superficie insertada del espacio curvo bidimensional es vertical. Es decir, para  $b(r) = r = b_0$ ,

$$\left(\frac{dz}{dr}\right) \Big|_{r=b_0} = \pm \infty \tag{74}$$

dicho radio define la garganta del agujero de gusano.



**Figura 3: Diagrama de inserción para un agujero de gusano. En la garganta se cumple  $b(r) = r = b_0$ ;  $l = 0$ . Para generar el agujero de gusano, se debe rotar la curva de la figura alrededor del eje  $z$ .**

Debido a que la coordenada radial  $r$  no se comporta adecuadamente cerca de la garganta del wormhole, es más apropiado definir una "distancia propia radial":

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1/2} dr \quad (75)$$

La distancia propia radial debe ser finita a través del espacio-tiempo.  $l$  es positiva sobre la garganta del wormhole, y negativa por debajo de la misma. Lejos de la garganta, en ambas direcciones radiales, el espacio debe ser asintóticamente plano por lo que  $dz/dr$  debe aproximarse a cero a medida que  $l \rightarrow \pm\infty$  (o  $b/r \rightarrow 0$  cuando  $l \rightarrow \pm\infty$ ).

## 11 Viajando a través de un agujero de gusano

Consideremos una sonda espacial viajando en dirección radial a través de un agujero de gusano. La sonda parte del reposo desde una estación espacial ubicada en la posición  $l = -l_1$  y arriba a otra estación ubicada en  $l = +l_2$  donde queda en reposo. La velocidad radial de la sonda medida por un observador en reposo en el agujero de gusano es:

$$v(r) = \mp c \frac{dx^1}{dx^0} \quad (76)$$

usando las ecuaciones (33a) y (33b) tenemos:

$$v(r) = \mp \frac{dr}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{\Phi} dt} \quad (77)$$

o en términos de la distancia propia radial

$$v(r) = \frac{dl}{e^{\Phi} dt} \quad (78)$$

Si  $\tau_T$  es el tiempo propio medido por un observador a bordo de la sonda, entonces podemos escribir:

$$\gamma d\tau_T = e^{\Phi} dt \quad (79)$$

donde  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ , por lo que (78) también se escribe:

$$\gamma v(r) = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} d\tau_T} \quad (80)$$

El signo negativo en la ecuación (80) lo tomaremos para el viaje debajo de la garganta del agujero, mientras que el signo positivo será para el viaje en la parte superior. En las estaciones espaciales tenemos  $v = 0$  mientras  $v > 0$  para  $-l_1 < l < +l_2$ . Supondremos que las estaciones espaciales están lo suficientemente alejadas de la garganta wormhole, de manera que, los efectos gravitacionales del mismo sean muy pequeños. Esto quiere decir que la geometría del espacio en las estaciones es casi plana. El corrimiento hacia el rojo gravitacional de las señales enviadas desde las estaciones hacia el infinito también debe ser muy pequeño por lo que usando la ecuación (69) tendremos:

$$z = e^{-\Phi} - 1 \approx -\Phi \ll 1 \quad (81)$$

o simplemente  $|\Phi| \ll 1$

Para que el viaje a través del agujero de gusano sea conveniente para los seres humanos, los tiempos empleados en viajar desde la estación ubicada en  $l = -l_1$  hasta la estación ubicada en  $l = +l_2$ , medidos tanto por el viajero a bordo de la sonda como por los observadores en las estaciones espaciales deberían ser menores que un año [9]:

$$\Delta\tau_T = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ año} \quad (82)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{ve^{\Phi}} \leq 1 \text{ año} \quad (83)$$

A continuación procederemos a calcular el valor de la aceleración de la gravedad medida por los observadores en reposo en las estaciones espaciales. El cuadrivector aceleración de un objeto en las estaciones es:

$$\begin{aligned}
 a'^{\alpha} &= c \frac{\delta u'^{\alpha}}{\delta x'^0} \\
 &= \left( \frac{\partial u'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} + \Gamma'_{\beta\gamma} u'^{\gamma} \right) u'^{\beta} \quad (84)
 \end{aligned}$$

donde  $u'^{\alpha}$  representa el cuadrivector velocidad. Para un observador en reposo dichas estaciones las podemos escribir:

$$u'^{\alpha} = (u'^0, 0, 0, 0) \quad (85)$$

Donde  $u'^0 = c$ . Entonces, para un observador en reposo

$$a'^{\alpha} = \left( \frac{\partial u'^{\alpha}}{\partial x'^0} + \Gamma'_{00} u'^0 \right) u'^0. \quad (86)$$

Por otro lado, ya que  $\Gamma'_{00} = \Gamma'_{00}^2 = \Gamma'_{00}^3 = 0$ , usando

$$\begin{aligned}
 \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}}
 \end{aligned} \quad (87)$$

podemos demostrar que

$$\Gamma'_{00}{}^0 = \Gamma'_{00}{}^2 = \Gamma'_{00}{}^3 = 0 \quad (88)$$

y

$$\Gamma'_{00}{}^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \Phi' \quad (89)$$

(debido a que la transformación entre las coordenadas  $x^{\alpha}$  y  $x'^{\alpha}$  es lineal, entonces  $\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}\right) = 0$ ). Las componentes del cuadrivector aceleración son por lo tanto:

$$a'^0 = a'^2 = a'^3 = 0 \quad (90)$$

y

$$a'^1 = \Gamma'_{00}{}^1 c^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \Phi' c^2 \quad (91)$$

La aceleración de la gravedad medida en las estaciones es:

$$g' = -(-a'^{\alpha} a'_{\alpha})^{1/2} = -(-a'^1 a'_1)^{1/2} \quad (92)$$

con  $a'_1 = -a'^1$ . Usando la ecuación (91) tenemos:

$$g' = -\Gamma'_{00}{}^1 c^2 \quad (93)$$

de manera que introduciendo (89) en (93) obtenemos:

$$g' = -\left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} \Phi' c^2 \approx -\Phi' c^2 \quad (94)$$

(ya que  $\frac{b}{r} \rightarrow 0$ ). Esta aceleración debe ser menor o igual que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra:

$$|g'| = |\Phi' c^2| \leq g_{\oplus} = 9,8 [m/s^2] \quad (95)$$

Debido a que  $|\Phi'| \ll 1$  en las estaciones, el tiempo medido por relojes colocados en las mismas es igual al tiempo coordenado  $t$ .

Para la métrica de Schwarzschild

$$b = r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (96)$$

y

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (97)$$

donde  $M$  es la masa que genera el campo gravitacional. La aceleración de la gravedad (usando la ecuación (94)) será en este caso:

$$g' = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}. \quad (98)$$

## 12 Aceleración experimentada por el viajero

La transformación entre las coordenadas del wormhole ( $x'^{\nu}$ ) y las coordenadas del marco de referencia del viajero en la sonda ( $x''^{\mu}$ ) es

$$x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (99)$$

donde

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$ . Esta transformación nos permite introducir una base de vectores para el marco de referencia del viajero:

$$\vec{e}''_{\alpha} = (\Lambda'^{-1})^{\beta}_{\alpha} \vec{e}'_{\beta} \quad (100)$$

o

$$\vec{e}''_0 = \gamma \vec{e}'_0 \mp \gamma\beta \vec{e}'_1 \quad (101)$$

$$\vec{e}''_1 = \mp \gamma\beta \vec{e}'_0 + \gamma \vec{e}'_1 \quad (102)$$

$$\vec{e}''_2 = \vec{e}'_2 \quad (103)$$

$$\vec{e}''_3 = \vec{e}'_3 \quad (104)$$

estos vectores satisfacen:

$$\vec{e}''_\alpha \cdot \vec{e}''_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (105)$$

por lo que constituyen una base ortonormal de vectores. El cuadrivector velocidad del viajero es

$$\vec{u} = c\vec{e}''_0 \quad (106)$$

Los cuadrivectores aceleración ( $\vec{a}$ ) y velocidad ( $\vec{u}$ ) del viajero son ortogonales de manera que usando (106) tenemos

$$\vec{a} \cdot \vec{e}''_0 = 0 \quad (107)$$

Por otro lado, podemos escribir:

$$\vec{a} = a''^\alpha \vec{e}''_\alpha, \quad (108)$$

de manera que  $a''^0 = 0$ .

Si el viajero se mueve en dirección radial, su aceleración debe ser radial ( $a''^2 = a''^3 = 0$ ), por lo que

$$\vec{a} = a''^1 \vec{e}''_1 = a\vec{e}''_1 \quad (109)$$

donde  $a$  representa la magnitud de aceleración experimentada por el viajero.

En la base  $\{\vec{e}_\alpha\}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_0 &= (a^0 \vec{e}_0 + a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_0 \\ &= g_{00} a^0 = a \vec{e}''_1 \cdot \vec{e}_0 = a e^\Phi \vec{e}''_1 \cdot \vec{e}'_0 \\ &= \mp \gamma \beta a e^\Phi \end{aligned}$$

De esta última relación, deducimos que

$$\begin{aligned} a^0 &= \mp \gamma \beta a e^\Phi g^{00} \\ &= \mp \gamma \beta a e^{-\Phi} \end{aligned} \quad (110)$$

En la base  $\{\vec{e}_\alpha\}$ ,  $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$  con  $u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3)$ , mientras en la base  $\{\vec{e}'_\alpha\}$ ,  $\vec{u} = u'^\mu \vec{e}'_\mu$  con

$$u'^\mu = (\gamma c, \gamma v, 0, 0). \quad (111)$$

Usando

$$u'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu, \quad (112)$$

podemos demostrar que

$$u^0 = e^{-\Phi} \gamma c \quad (113)$$

$$u^1 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v \quad (114)$$

$$u^2 = u^3 = 0 \quad (115)$$

en la base  $\{\vec{e}'_\alpha\}$ , también tenemos

$$\begin{aligned} a^\alpha &= u^\alpha{}_{,\beta} u^\beta \\ &= \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma \right) u^\beta \end{aligned} \quad (116)$$

donde  $u^\alpha = u^\alpha(r)$ .

Para  $\alpha = 0$  (116) se escribe

$$a^0 = \left( \frac{\partial u^0}{\partial x^1} \right) u^1 + 2\Gamma^0_{01} u^0 u^1 \quad (117)$$

con  $x^1 = r$ . Introduciendo los valores de  $u^0$ ,  $u^1$  y  $\Gamma^0_{01}$  dados por (113), (114) y (6), respectivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} a^0 &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\Phi} \\ &\quad \times \gamma c^2 \beta \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi) \end{aligned} \quad (118)$$

La ecuación (118), conjuntamente con la ecuación (110), nos permite calcular el valor de  $a$ :

$$\begin{aligned} a &= \mp \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi} \\ &\quad \times c^2 \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi) \end{aligned} \quad (119)$$

o en términos de la derivada con respecto a  $l$ :

$$a = e^{-\Phi} c^2 \frac{d}{dl} (\gamma e^{\Phi}). \quad (120)$$

donde hemos usado

$$dr = \mp v \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\Phi} dt,$$

y

$$dl = v e^{\Phi} dt$$

La condición de que la aceleración del viajero con respecto al agujero de gusano no debe sobrepasar el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$|a| = c^2 \left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^{\Phi}) \right| \leq g_{\oplus} \quad (121)$$

que nos da la condición:

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^{\Phi}) \right| \leq \frac{1}{0,971 \text{ años luz}}. \quad (122)$$

### 13 Aceleración de marea gravitacional

Las aceleraciones de marea  $\Delta \vec{a}$  entre varias partes del cuerpo de un viajero no deben exceder el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Sea  $\vec{\xi}$  el cuadvivector separación entre dos partes del cuerpo de un viajero (por ejemplo, la rodilla y la cabeza). En el marco de referencia del viajero,  $\vec{\xi}$  es puramente espacial ( $\xi''^0 = 0$ ), de manera que

$$\vec{u} \cdot \vec{\xi} = c \xi''^0 = 0 \quad (123)$$

La aceleración de marea gravitacional está dada por la ecuación de desviación de la geodésica [2, 3, 4, 5, 6], que en la base  $\{\bar{e}''_{\alpha}\}$  es:

$$\Delta a''^{\nu} = \frac{\delta^2 \xi''^{\nu}}{\delta \tau_T^2} = -R''^{\nu}_{\beta\gamma\mu} \xi''^{\gamma} u''^{\beta} u''^{\mu},$$

y ya que  $\vec{\xi}$  es puramente espacial,  $\Delta a''^{\nu}$  también lo es. Por ello, podemos escribir:

$$\Delta a''^i = \frac{\delta^2 \xi''^i}{\delta \tau_T^2} = -c^2 R''^i_{0j0} \xi''^j \quad (124)$$

Finalmente, como  $R''^i_{0j0} = -R''^i_{i0j0}$ , tenemos:

$$\Delta a''^i = c^2 R''^i_{i0j0} \xi''^j \quad (125)$$

donde los  $R''^i_{i0j0}$  se pueden calcular a partir de la relación:

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x''^{\nu}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x''^{\rho}} \times \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x''^{\sigma}} R'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (126)$$

usando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x''^0 \mp \gamma \beta x''^1, \\ x'^1 &= \mp \gamma \beta x''^0 + \gamma x''^1 \text{ y} \\ x'^2 &= x''^2; x'^3 = x''^3 \end{aligned}$$

obtenidas a partir de la expresión (99). El resultado es:

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{1010} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) [-\Phi'' + \frac{(rb' - b)}{2r(r - b)} \Phi' - (\Phi')^2] \quad (127)$$

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{2020} = R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{3030} = \frac{\gamma^2}{2r^2} [2(b - r)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(b - rb')] \quad (128)$$

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{1020} = R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{1030} = R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{2030} = 0 \quad (129)$$

$$R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{2010} = R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{3010} = R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{3020} = 0 \quad (130)$$

(esta última relación es debido a que  $R''^{\mu\nu\rho\sigma} = R''^{\rho\sigma\mu\nu}$ ). Por lo tanto, las componentes de la aceleración son:

$$\begin{aligned} \Delta a''^1 &= c^2 R''^{\mu\nu\rho\sigma}_{1010} \xi''^1 = c^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\ &\times [-\Phi'' + \frac{(rb' - b)}{2r(r - b)} \Phi' - (\Phi')^2] \xi''^1 \end{aligned} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \Delta a''^2 &= c^2 R''_{2020} \xi''^2 & (132) \\ &= c^2 \frac{\gamma^2}{2r^2} [2(b-r)\Phi' + \\ &\quad + \frac{\beta^2}{r}(b-rb')] \xi''^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta a''^3 &= c^2 R''_{3030} \xi''^3 & (133) \\ &= c^2 \frac{\gamma^2}{2r^2} [2(b-r)\Phi' + \\ &\quad + \frac{\beta^2}{r}(b-rb')] \xi''^3 \end{aligned}$$

Si tomamos  $|\xi''^i| \approx 2$  metros (que es aproximadamente el tamaño de un ser humano) y con la condición:

$$|\Delta a''^i| \leq g_{\oplus} = 9,8 \text{m/s}^2$$

tenemos:

$$\begin{aligned} |R''_{1010}| &= \left| \left( 1 - \frac{b}{r} \right) [-\Phi'' + \right. & (134) \\ &\quad \left. + \frac{(rb' - b)}{2r(r-b)} \Phi' - (\Phi')^2 \right] \Big| \\ &\leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \\ &\approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 \text{m})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R''_{2020}| &= |R''_{3030}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \right. & (135) \\ &\quad \left. \times \left[ 2(b-r)\Phi' + \frac{\beta^2}{r}(b-rb') \right] \right| \\ &\leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \\ &\approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 \text{m})^2} \end{aligned}$$

A (134) y (135) se les denomina restricciones de marea gravitacional radial y laterales, respectivamente [9]. La ecuación (134) puede considerarse como una restricción de la función de corrimiento hacia el rojo  $\Phi$  (de hecho  $\Phi' = 0$  satisface dicha restricción). La ecuación (135) es en cambio una restricción sobre la velocidad  $v$  con la que el viajero puede atravesar el agujero de gusano.

### 14 Materia Exótica

En la garganta del agujero de gusano ( $r = b = b_0$ ) la tensión dada por:

$$\tau_0 = \frac{1}{kb_0^2} \tag{136}$$

(ver ecuación (53)). Reemplazando el valor de la constante  $k$ , podemos escribir:

$$\tau_0 = 4,83 \times 10^{40} \left( \frac{N}{m^2} \right) \left( \frac{10m}{b_0} \right)^2 \tag{137}$$

Esta tensión es enorme. en efecto, para  $b_0 = 1\text{km}$ , la tensión es:

$$\tau_0 = 4,83 \times 10^{36} \frac{\text{Newtons}}{m^2}$$

Consideremos la función:

$$\varsigma \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} \tag{138}$$

usando las ecuaciones (57) y (58), (138) se escribe:

$$\varsigma = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' - b'}{|b'|} \tag{139}$$

Cerca de la garganta,  $\left. \frac{d^2r}{dz^2} \right|_{r=b=b_0} > 0$  (en inglés esta condición se denomina “outward flaring of the throat”). A partir de la expresión (73) podemos calcular dicha segunda derivada, y el resultado es:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b-rb'}{2b^2} \tag{140}$$

de manera que introduciendo esta relación en (139), tenemos:

$$\varsigma = \frac{2b^2}{r|b'|} \left( \frac{d^2r}{dz^2} \right) - \frac{2(r-b)\Phi'}{|b'|} \tag{141}$$

En la garganta

$$\varsigma_0 = \frac{2b_0^2}{r|b'|_{r=b_0}} \left( \frac{d^2 r}{dz^2} \Big|_{r=b_0} \right). \quad (142)$$

Ya que  $\rho$  es finito, la ecuación (57) nos dice que  $b'$  también lo es. Por lo tanto, ya que la segunda derivada es positiva en la garganta tenemos:

$$\varsigma_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \quad (143)$$

de manera que  $\tau_0 > \rho_0 c^2$ . Esta última restricción nos dice que en la garganta, la tensión ( $\tau_0$ ) debe ser tan grande como para exceder a la densidad total de masa-energía ( $\rho_0 c^2$ ). Esta restricción es obviamente conflictiva. A un material que satisface esta propiedad,  $\tau > \rho c^2 > 0$ , Morris y Thorne lo han denominado “exótico” [9].

Un observador que viaja a través del agujero de gusano con una velocidad radial  $v$ , mide una densidad de energía  $T''_{00}$ , que puede ser calculada a partir de la expresión:

$$T''_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\nu} T'_{\alpha\beta} \quad (144)$$

el resultado es:

$$T''_{00} = \gamma^2 T'_{00} \mp 2\gamma^2 \beta T'_{01} + \gamma^2 \beta^2 T'_{11},$$

reemplazando los valores de los símbolos de Christoffel (ver sección 7), obtenemos:

$$T''_{00} = \gamma^2 (\rho c^2 - \beta^2 \tau). \quad (145)$$

Cerca de la garganta del agujero

$$T''_{00} = \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0 \quad (146)$$

donde hemos usado la relación  $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$ . Si la velocidad radial es próxima a la velocidad de la luz,  $\gamma \gg 1$  y entonces:

$$T''_{00} \approx \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) \quad (147)$$

y como  $\tau_0 > \rho_0 c^2$ , tenemos:

$$T''_{00} < 0 \quad (148)$$

de manera que el viajero medirá una densidad de masa-energía negativa en la garganta del wormhole. Una manera de minimizar la “exoticidad” (en palabras de Morris y Thorne) del material de la garganta del agujero, es establecer la restricción de que en todas partes se cumpla:

$$\rho c^2 \geq 0 \quad (149)$$

(para observadores en reposo en el interior del wormhole,  $\gamma \approx 1$ , por lo que  $T''_{00} \approx \rho_0 c^2$ , de manera que podríamos tener quizás  $\rho_0 c^2 < 0$ ).

## 15 Condiciones de energía

Especificaremos las condiciones de energía en el caso en el que el tensor de energía-momentum  $T_{\mu\nu}$  es diagonal, es decir:

$$T_{\mu\nu} = \text{diagonal}(\rho c^2, P_1, P_2, P_3). \quad (150)$$

Condición de Energía Nula (NEC: Null Energy Condition): Esta condición nos dice que para cualquier cuadrivector nulo  $k^\mu$  se tiene:

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (151)$$

esta condición, para el tensor (150) se puede escribir:

$$\rho c^2 + P_i \geq 0 \quad \forall i$$

Condición de Energía Débil (WEC: Weak Energy Condition): Establece que para cualquier cuadrivector cuasi temporal  $V^\mu$  ( $V^\mu$  puede ser el cuadrivector velocidad) debe cumplirse:

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (152)$$

esta condición, para el tensor (150) implica que

$$\rho c^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho c^2 + P_i \geq 0 \quad \forall i.$$

La condición WEC implica la NEC por continuidad.

Condición de Energía Fuerte (SEC: Strong Energy Condition): Para cualquier cuadrivector cuasitemporal  $V^\mu$  debe cumplirse:

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (153)$$

donde  $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ . Esta condición aplicada al tensor (150) nos da:

$$\rho c^2 + P_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \rho c^2 + \sum_{i=1}^3 P_i \geq 0 \quad \forall i$$

La condición SEC implica la NEC, pero no necesariamente la WEC.

Condición de Energía Dominante (DEC: Dominant Energy Condition): Establece que para cualquier cuasivector cuasitemporal  $V^\mu$ :

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0 \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu}V^\nu \quad (154)$$

no es cuasiespacial.

Esta condición implica que

$$\rho c^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad P_i \in [-\rho c^2, \rho c^2] \quad \forall i$$

de manera que la condición DEC implica la condición WEC que a su vez implica la condición NEC, pero no necesariamente la SEC.

Si en la base  $\{\bar{e}'_\alpha\}$  calculamos (151) con  $k'^\mu = (1, 1, 0, 0)$  tenemos

$$T'_{\mu\nu}k'^\mu k'^\nu = \rho(r) c^2 - \tau(r) \quad (155)$$

que en la garaganta es

$$T'_{\mu\nu}k'^\mu k'^\nu|_{r=b=b_0} = \rho_0 c^2 - \tau_0 < 0$$

y que como vemos viola la condición NEC. A la materia que viola dicha condición se le denomina "exótica"[9] [11].

En los años 60 y comienzos de los setenta, la mayoría de los físicos consideraban como algo inviolable, el hecho de que ningún observador debería ser capaz de medir una densidad de energía negativa. A esta aserción se le denomina "Condición de Energía Débil", que como vimos en (153), con algunas restricciones adicionales se transforma en la "Condición de Energía Fuerte". En la actualidad, sin embargo, sabemos que ciertos campos cuánticos pueden violar dichas condiciones de energía. Por ejemplo, cualquier observador estático ubicado sobre el horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild (rodeado por el vacío) puede verificar que el valor esperado de la densidad de energía es negativo y es independiente del tiempo.[12] Esta densidad de energía negativa está asociada con la creación y emisión de partículas, antipartículas y radiación por el agujero negro y la consecuente evaporación del mismo [3, 4, 5, 6]. Otro ejemplo de violación de todas las condiciones de energía es el "Efecto Casimir"[13]. Un análisis muy interesante de las condiciones de energía y las singularidades del espacio-tiempo se puede encontrar en la referencia [14].

## 16 Soluciones a las ecuaciones de Morris-Thorne con fuerza de marea gravitacionales nulas en la dirección radial.

Si  $\Phi = \Phi_0 = \text{constante}$  (en particular  $\Phi = 0$ ) y  $v(r)$  es muy pequeña, entonces  $\Delta a'' = 0$ . Es decir que la fuerza de marea gravitacional en la dirección radial es cero. En ese caso, podemos escribir (ver ecuaciones 57-59)

$$b = b(r) \quad (156)$$

$$\rho(r) c^2 = \frac{b'}{kr^2} \quad (157)$$

$$\tau(r) = \frac{b}{kr^3} \quad (158)$$

$$P(r) = \frac{(b - rb')}{2kr^3} \quad (159)$$

Adicionalmente tenemos (ver ecuaciones (139) y (141)):

$$\begin{aligned} \varsigma(r) &= \frac{2b^2}{r|b'|} \left( \frac{d^2 r}{dz^2} \right) \\ &= \frac{(b - rb')}{r|b'|}. \end{aligned} \quad (160)$$

La función de forma  $b(r)$  que genera estas soluciones debe satisfacer las condiciones de borde enunciadas en la sección 8.

En el artículo de Morris-Thorne se presentan soluciones a las ecuaciones (57-59) de la forma [9]

$$b(r) = b_0 \left( \frac{r}{b_0} \right)^{1-\eta} \quad (161)$$

$$\Phi = \Phi_0 = \text{constante}$$

donde  $\eta$  es una constante,  $0 < \eta < 1$  y  $b_0 \leq r < R_s$  ( $R_s$  es el radio de la esfera en la que está confinado el agujero de gusano). En esta sección, introduciremos una solución exponencial a dichas ecuaciones:

$$b(r) = b_0 e^{1-\frac{r}{b_0}} \quad (162)$$

Se puede verificar fácilmente que dicha solución satisface las condiciones de borde

$$\begin{aligned} b(b_0) &= b_0 \quad \text{y} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{b(r)}{r} \right) &= 0. \end{aligned}$$

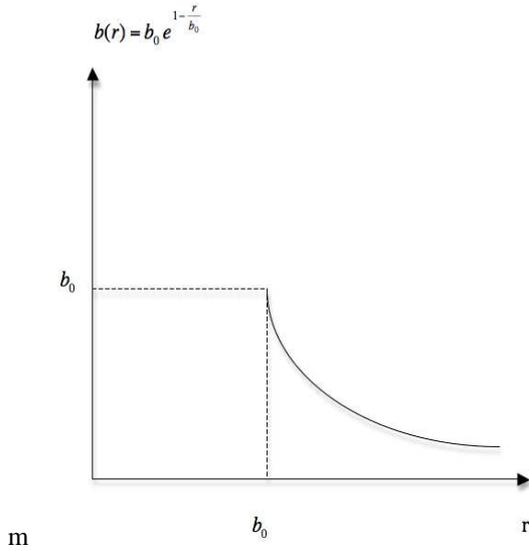


Figura 4: Función de forma exponencial.

El valor de  $\zeta(r)$  es, usando (160):

$$\zeta(r) = 1 + \frac{b_0}{r} > 0 \quad \forall r \quad (163)$$

de manera que  $\tau(r) > \rho(r)c^2 \quad \forall r$ , lo que significa que el material es exótico para todos los valores de  $r$ . Por otro lado, a partir de (157) podemos calcular el valor de la densidad de masa-energía, que resulta ser

$$\rho(r) c^2 = -\frac{e^{1 - \frac{r}{b_0}}}{kr^2} < 0, \quad (164)$$

de manera que tenemos materia con una densidad de masa-energía negativa medida por observadores en reposo con respecto al agujero de gusano. Los valores de  $\tau(r)$  y  $P(r)$  los podemos calcular usando (158) y (159), el resultado es:

$$\tau(r) = \frac{b_0 e^{1 - \frac{r}{b_0}}}{kr^3} \quad (165)$$

$$P(r) = \frac{(r + b_0) e^{1 - \frac{r}{b_0}}}{2kr^3}. \quad (166)$$

En el límite cuando  $r \rightarrow \infty$  tenemos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\rho(r), \tau(r), P(r)) = 0,$$

de manera que para distancias muy grandes medidas en relación al agujero de gusano, el material exótico será extremadamente débil (prácticamente despreciable). A partir de (164-166), podemos demostrar que la ecuación de estado del material exótico es:

$$\begin{aligned} \rho(r) c^2 &= -\frac{r}{b_0} \tau(r) \\ &= -\frac{2r}{r + b_0} P(r) \end{aligned} \quad (167)$$

La distancia propia en dirección radial es:

$$l = \pm \int_{b_0}^r \frac{r^{\frac{1}{2}} dr}{\left(r - b_0 e^{1 - \frac{r}{b_0}}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (168)$$

y fácilmente podemos demostrar que

$$l \rightarrow \pm \infty \text{ cuando } r \rightarrow \infty$$

y

$$l \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow b_0$$

Por otro lado, (73) se puede escribir,

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b_0 e^{1 - \frac{r}{b_0}}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (169)$$

que evaluada en  $r = b_0$  nos da:

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=b_0} = \pm \infty \quad (170)$$

de manera que la pendiente de la superficie de inserción es vertical. De (169) tenemos adicionalmente

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{e^{1 - \frac{r}{b_0}} (r + b_0)}{2b^2} > 0 \quad (171)$$

por lo que se satisface la condición que habíamos mencionado en la sección 14 para el diagrama de inserción (outward flaring). También, a partir de (169), podemos demostrar que  $\lim_{r \rightarrow 0} (z) = 0$ .

Fácilmente se puede demostrar que la solución con factor de forma exponencial (162), viola todas las condiciones de energía mencionadas en la sección 15.

A partir de la solución (162), construiremos una solución más completa y real de las ecuaciones de Morris-Thorne.

### 17 Materia Exótica limitada a la vecindad de la garganta del agujero de gusano

Si nosotros queremos soluciones con una densidad de masa-energía positiva  $\rho \geq 0$ , debemos permitir que la materia exótica ocupe una región macroscópicamente larga del espacio definida por una radio crítico  $r_c$  tales que  $r_c = b_0 + \Delta r$  con  $\Delta r \geq b_0$ . Fuera de este radio crítico, el material no es exótico. Tomando una pequeña pendiente en  $r_c$ :

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)\Big|_{r=r_c} = \pm \left(\frac{r}{b} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{r=r_c} = 0,1 \quad (172)$$

con  $b(r_c) = b_0 e^{1 - \frac{r_c}{b_0}}$ . La solución de la ecuación (172) es  $\frac{r_c}{b_0} = 4,184$ . Por lo tanto, para  $r_c \leq r \leq R_s$  (donde  $R_s$  es el radio de la esfera dentro de la que está confinado el wormhole), nosotros tomaremos

$$b(r) = \frac{r}{200}, \Phi = \Phi_0 = \text{constante}. \quad (173)$$

De (173) tenemos,  $b'(r) = \frac{1}{200} > 0$ , lo cual implica (ver ecuación (157)),

$$\rho(r) c^2 = \frac{1}{200kr^2} > 0 \quad (174)$$

Similarmente tenemos de (158-160)

$$\tau(r) = \rho(r) c^2, P(r) = 0 \text{ y } \zeta = 0. \quad (175)$$

Para conectar la solución en el interior del agujero de gusano con el vacío externo, consideremos una capa de transición de espesor  $\Delta R$  tales que:

$$\rho(r) = \frac{\tau(R_s)}{c^2} \left(\frac{R_s}{\Delta R}\right) \quad (176)$$

$$\tau(r) = \tau(R_s) - \left[\frac{\tau(R_s)}{\Delta R}\right] (r - R_s) \quad (177)$$

con  $R_s < r < R_s + \Delta R$ . De (177) vemos que cuando  $r \rightarrow R_s$ ,  $\tau \rightarrow \tau(R_s)$  y cuando  $r \rightarrow R_s + \Delta R$ ,  $\tau \rightarrow 0$ . La ecuación (176) nos dice que el material en la capa de transición es noexótico.

Integrando (157) (entre los límites  $R_s$  y  $r$ ), tenemos:

$$b(r) = b(R_s) + \frac{k\tau(R_s)R_s}{3\Delta R} (r^3 - R_s^3). \quad (178)$$

Por otro lado,  $\Phi'(R_s) = 0$  implica (ver (58))

$$b(R_s) = kR_s^3\tau(R_s). \quad (179)$$

Usando la aproximación  $r^3 - R_s^3 \approx 3(r - R_s)R_s^2$  (ya que  $r \approx R_s$ ) y la expresión (179), (178) se puede escribir,

$$b(r) \approx b(R_s) + \frac{(r - R_s)}{\Delta R} b(R_s) \quad (180)$$

Si elegimos,

$$\Delta R = b(R_s) \quad (181)$$

con  $R_s \gg b_0$ , tenemos

$$\Delta R = b_0 e^{1 - \frac{R_s}{b_0}} \ll R_s \quad (182)$$

$$R_s e^{-\frac{R_s}{b_0}} \ll R_s,$$

Definiendo  $B \equiv b(R_s + \Delta R)$ , y usando (180), podemos escribir aproximadamente,

$$B \approx 2b(R_s) \quad (183)$$

Si introducimos la expresión para  $b(r)$  dada por (180) en la ecuación (53), usando (177), (179) y las aproximaciones

$$r \approx R_s$$

$$r - b = R_s \left(1 - \frac{\Delta R}{R_s}\right) \approx R_s,$$

es fácil demostrar que

$$\Phi'(r) \approx \frac{(r - R_s)}{\Delta R} \frac{B}{2R_s^2}, \quad (184)$$

(con  $R_s < r < R_s + \Delta R$ ) y por lo tanto

$$\Phi'(R_s + \Delta R) \approx \frac{B}{2R_s^2} \quad (185)$$

Similarmente, partiendo de (59), se puede demostrar que

$$P(r) \approx \frac{R_s\tau(R_s)}{2\Delta R} \quad (186)$$

para  $R_s < r < R_s + \Delta R$ . Por lo tanto, la ecuación de estado del material de la capa de transición es:

$$P(r) = \frac{\rho(r) c^2}{2} \quad (187)$$

donde  $\rho(r)$  es independiente de  $\tau$  (ver ecuación (176)).

Si localizamos las estaciones espaciales al final de la región de Schwarzschild ( $r_1 = r_2 = R_s + \Delta R$ ) y requerimos que el viajero sea capaz de llegar a dichas estaciones sin ser triturado gravitacionalmente, entonces usando (95) y (185), tenemos

$$|\Phi'(R_s + \Delta R)| \approx \frac{B}{2R_s^2} \leq (9,2 \times 10^{15} m)^{-1}$$

Usando  $\frac{B}{2} = b(R_s) = \Delta R$  podemos escribir la siguiente desigualdad:

$$\frac{b(R_s)}{R_s^2} \leq (9,2 \times 10^{15} m)^{-1} \quad (188)$$

De la ecuación (173)

$$b(R_s) = \frac{R_s}{200} \quad (r \geq R_s + \Delta R) \quad (189)$$

por lo que obtenemos

$$R_s \geq 4,6 \times 10^{13} [m] = 306,7 a.u. \quad (190)$$

donde  $1 a.u. = 1,5 \times 10^{11} m$ .

Cuando la solución exterior de Schwarzschild (ver ecuación (63) reemplazando  $D$  por  $B$  y  $r$  por  $R_s$ ) es aplicada a la capa de espesor  $\Delta R$ , tenemos:

$$\Phi = \Phi_0 = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{B}{R_s} \right) \quad (191)$$

Ya que  $R_s \gg b_0$ , usando (183) resulta que

$$\frac{B}{R_s} = 2 \frac{b_0}{R_s} e^{1 - \frac{R_s}{b_0}} \ll 1 \quad (192)$$

de manera que podemos usar la aproximación  $\ln(1 - x) \approx -x$  para  $x \ll 1$  y escribir

$$\Phi = \Phi_0 = -\frac{B}{2R_s}. \quad (193)$$

Por lo tanto

$$e^{2\Phi} = e^{2\Phi_0} = e^{-\frac{B}{R_s}} \rightarrow 1. \quad (194)$$

Vemos entonces que de acuerdo a (194),  $e^{2\Phi}$  difiere de la unidad únicamente por una cantidad muy pequeña, lo cual implica que el tiempo propio medido por observadores estáticos es aproximadamente igual al tiempo coordenado  $t$  a través del agujero de gusano.

Utilizando la expresión (189), (178) se puede escribir

$$b(r) = \frac{R_s}{200} + \frac{(r^3 - R_s^3)}{3R_s^2} \quad (195)$$

para  $R_s \leq r \leq R_s + \Delta R$ . Similarmente a partir de (191) y (193) obtenemos:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_0 = -\frac{1}{200}, & b_0 \leq r \leq R_s + \Delta R \\ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{R_s}{100r} \right), & r \geq R_s + \Delta R \end{cases} \quad (196)$$

### 18 Solución completa

A continuación resumimos la solución hallada en la sección 17.

$$b(r) = \begin{cases} b_0 e^{1 - \frac{r}{b_0}}, & b_0 \leq r \leq r_c \\ \frac{r}{200}, & r_c \leq r \leq R_s \\ \frac{R_s}{200} + \frac{(r^3 - R_s^3)}{3R_s^2}, & R_s \leq r \leq R_s + \Delta R \end{cases}$$

con  $r_c = 4,184 b_0$ .

$$\Phi(r) = \begin{cases} \Phi_0 = -\frac{1}{200}, & b_0 \leq r \leq R_s + \Delta R \\ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{R_s}{100r} \right), & r \geq R_s + \Delta R \end{cases}$$

$$\varsigma = \begin{cases} 1 + \frac{b_0}{r} > 0, & b_0 \leq r \leq r_c \\ 0, & r_c \leq r \leq R_s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho(r) c^2 &= -\frac{r\tau(r)}{b_0} \\ &= -\frac{2rP(r)}{r + b_0} < 0, \quad b_0 \leq r \leq r_c \end{aligned}$$

$$\tau(r) = \rho(r) c^2, \quad P(r) = 0, \quad r_c \leq r \leq R_s$$

En la capa de transición de espesor  $\Delta R$

$$\rho = \frac{R_s \tau(R_s)}{\Delta R c^2},$$

$$\begin{aligned} \tau(r) &= \tau(R_s) - \left[ \frac{\tau(R_s)}{\Delta R} \right] (r - R_s), \\ \text{para} \quad &R_s \leq r \leq R_s + \Delta R, \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\tau = \rho c^2 = P = 0 \text{ para } r \geq R_s + \Delta R.$$

### 19 Viajando a través de un agujero de gusano con función de forma exponencial

Consideremos un viajero a bordo de una sonda espacial que se desplaza entre las dos estaciones espaciales descritas en la sección 11. Ya que para un agujero de gusano con función de forma exponencial se tiene,  $e^\Phi \approx 1$  (ver 194), la velocidad radial de la sonda será aproximadamente  $v(r) = dl/dt$ , y la magnitud de su aceleración será entonces

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{d^2l}{dt^2} \right| \leq g_\oplus \quad (197)$$

Supongamos que el viajero realiza la siguiente travesía: acelera partiendo del reposo desde la estación ubicada en  $l = -l_1$  en dirección hacia la garganta del agujero de gusano hasta que se encuentra a medio camino de la misma, entonces desacelera hasta que llega a quedar en reposo en la garganta, luego acelera nuevamente alejándose de la garganta hasta que se encuentra a medio camino de la estación ubicada en  $l = +l_2$  y finalmente desacelera llegando a quedar en reposo en dicha estación. Si las estaciones se encuentran ubicadas sobre la superficie de la esfera en la que está confinado el wormhole, entonces  $l_1 = l_2 = R_s$

La velocidad máxima del viajero en cualquiera de las cuatro etapas de la mencionada travesía es

$$\begin{aligned} v_{\max} &= (g_\oplus R_s)^{\frac{1}{2}} \\ &= 9,9 \times 10^5 \text{ (m/s)} \left( \frac{R_s}{10^{11} \text{ m}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (198) \\ &= 3,3 \times 10^{-3} c \left( \frac{R_s}{10^{11} \text{ m}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si reemplazamos  $v_{\max}$  por  $c$  en la expresión (198), obtenemos que  $R_s \ll 10^{16} [m]$ , por lo que

$$\gamma_{\max} = \left( 1 - \left( \frac{v_{\max}}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1.$$

Entonces, los tiempos empleados en viajar desde la una estación hasta la otra, medidos tanto por el viajero a bordo de la sonda como por los observadores en reposo en las estaciones espaciales serían:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_T &\approx \Delta t \approx \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v} \\ &\approx \frac{4}{(2g_\oplus)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{R_s}{2}} \frac{dl}{l^{\frac{1}{2}}} \quad (199) \\ &= 4 \left( \frac{R_s}{g_\oplus} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La última ecuación también se puede escribir:

$$\Delta\tau_T = \Delta t = 4,68 \text{ (días)} \times \left( \frac{R_s}{10^{11} \text{ metros}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (200)$$

Si tomamos (ver ecuación 190)  $R_s = 4,6 \times 10^{13}$  metros, obtenemos  $\Delta\tau_T = \Delta t = 100,38$  días, por lo que el viaje completo requerirá un tiempo de 100 días aproximadamente.

### Conclusiones

Una de las más fascinantes predicciones de la Teoría General de la Relatividad de Einstein es la posible existencia de agujeros de gusano (túneles en el hiperespacio que conectan dos puntos en el universo). Desde 1985, principalmente, son el objeto de estudio de numerosos físicos alrededor del mundo.

En este artículo, hemos revisado las propiedades fundamentales de los agujeros de gusano del tipo Morris-Thorne. Hemos visto cómo la materia exótica (si existe) de la que estarían formados dichos agujeros, viola la Condición de Energía Nula (NEC). En la actualidad, sin embargo, sabemos que ciertos campos cuánticos pueden violar dicha condición. Ejemplos de tal violación son la radiación emitida por un agujero negro (radiación Hawking) y el "Efecto Casimir" que viola además las otras condiciones (WEC, SEC, DEC).

En la sección 16 hemos presentado una nueva solución a las ecuaciones derivadas por Morris-Thorne (ecuaciones 57, 58, 59). Para hallar dicha solución, hemos empleado la misma filosofía usada por Morris y Thorne, probando con funciones  $b(r)$  y  $\Phi(r)$  que permitan construir un agujero de gusano apropiado para un viaje interestelar. En la mencionada solución, el factor de forma  $b = b(r)$  tiene carácter exponencial, mientras que la función de corrimiento hacia el rojo  $\Phi = \Phi(r)$  es constante. A partir de esta solución, hemos construido una solución más realista (ver secciones 17 y 18) limitando el material exótico a la vecindad de la garganta del wormhole. Esta solución, por cierto, viola todas las condiciones de energía.

De existir el material exótico, una civilización muy avanzada podría hacer uso del mismo para crear un wormhole que podría estar abierto un intervalo de tiempo suficientemente largo para que se pueda viajar a través del mismo.

Partiendo de la función de forma exponencial, hemos demostrado que, para un viajero a bordo de una sonda espacial que se desplaza entre dos estaciones espaciales que se encuentran ubicadas sobre la superficie de la esfera en la que está confinado el wormhole, el tiempo

empleado en viajar desde una estación hasta la otra (medido tanto por el viajero a bordo de la sonda como por los observadores en reposo en las estaciones espaciales) sería, para  $R_S = 306,7$  unidades astronómicas, aproximadamente 100 días. Este es un tiempo muy razonable para un viaje de las características mencionadas.

Sin embargo, y como lo señalan Morris y Thorne, el agujero de gusano podría ser inestable: “El material exótico podría interactuar fuertemente con la materia ordinaria, haciendo que el viaje a través del mismo sea impracticable, debido fundamentalmente a las enormes fuerzas de marea generadas por el campo exótico”.

Solamente un claro entendimiento de la estructura del material exótico nos permitirá tener una mejor idea de si es posible o no la construcción de un agujero de gusano practicable. Nuestro estado de conocimiento hasta el presente, no nos permite excluir la existencia de dichos agujeros.

### Referencias

- [1] Thorne, K.S. 1994. “Black holes and time warps: Einstein’s outrageous legacy.” W. W. Norton & Company. New York, NY .
- [2] Kaku, M. 1994. “Hyperspace.” Oxford University Press, Inc. New York, NY.
- [3] Kenyon, I. R. 1996. “General Relativity.” Oxford University Press. Oxford, UK.
- [4] Schutz, B. F. 2005. “A first course in general relativity.” Cambridge University Press. Cambridge, UK.
- [5] Marín, C. 2009. “Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild.” *Avances en Ciencias e Ingenierías*. 1, 79-90.
- [6] Marín, C. 2007. “La Expansión del Universo.” Una Introducción a cosmología, relatividad General y física de partículas. Quito-Ecuador.
- [7] Einstein, A., Rosen, N. 1935. “The particle problem in the general theory of relativity.” *Phys. Rev.* 48, 73-77.
- [8] Chaisson, E., Mc Millan, S. 2004. “Astronomy.” 4<sup>th</sup> edition, Pearson-Prentice Hall. New York, NY.
- [9] Morris, M. S., Thorne, K. S. 1988. “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity.” *Am. J. Phys.* 56, 395-412.
- [10] Misner, C. W., Thorne, K.S. and Wheeler, J. A. 1973. “Gravitation.” W. H. Freeman & Company. New York, NY.
- [11] Lobo, F. S. N. 2005. “Energy conditions, traversable wormholes and dust shells.” *Gen. Rel. Grav.* 37, 2023-2038.
- [12] Candelas, P. 1980. “Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime.” *Phys. Rev. D.* 21, 2185-2202.
- [13] Khabibullin, A. R., Khusnutdinov, N. R., Sushkov, S. V. 2006. “Casimir effect in a wormhole spacetime.” *Class. Quant. Grav.* 23, 627-634.
- [14] Tipler, F. J. 1978. “Energy conditions and spacetime singularities.” *Phys. Rev. D.* 17, 2521-2528.