AVANCES
EN CIENCIAS E INGENIERÍAS
ARTÍCULO/ARTICLE SECCIÓN/SECTION A

Generación de matrices para evaluar el desempeño de estrategias de búsqueda de testores típicos

Eduardo Alba[1*], **Roberto Santana**[2]

[1]*Colegio de Ciencias e Ingeniería - El Politécnico, Universidad San Francisco de Quito*
Diego de Robles y Vía Interoceánica, Quito, Ecuador
[2]*Universidad Politécnica de Madrid*
Ramiro de Maeztu 7, 28040, Madrid, España
[*]*Autor principal/Corresponding author, e-mail: ealba@usfq.edu.ec*

Editado por/Edited by: A. Hidrobo, Dr.
Recibido/Received: 05/24/2010. Aceptado/Accepted: 05/28/2010.
Publicado en línea/Published on Web: 06/10/2010. Impreso/Printed: 06/01/2010.

Abstract

Testors, and particularly typical testors, have been used in feature selection and supervised classification problems. Deterministic algorithms have usually been used to find typical testors. Recently, a new approach based on evolutionary algorithms has been developed. A common problem to test the behavior of both approaches is the necessity of knowing, in advance, the number of typical testors of a given basic matrix. For an arbitrary matrix, this number can not be known unless all typical testors have been found. Therefore, this paper introduces, for the first time, a strategy to generate basic matrices for which the number of typical testors is known without to find them. This method is illustrated with some examples.

Keywords. Testor theory, algorithm for finding typical testors, fisure selection.

Resumen

Los testores, y en particular los testores típicos, han sido utilizados en problemas de selección de variable y problemas de clasificación supervisada. Comunmente se ha usado algoritmos determinísticos para hallar testores típicos. A principios de esta decada comenzó a desarrollarse un nuevo enfoque basado en algoritmos evolutivos. Un problema común para probar el comportamiento de ambos métodos es la necesidad de conocer a priori el número de testores típicos de una matriz dada. Para una matriz arbitraria, no se puede saber este número a menos de que se hayan encontrado todos los testores típicos. Por lo tanto, este trabajo introduce, por primera vez, una estrategia para generar matrices básicas para las cuales el número de testores típicos es conocido sin necesidad de aplicar un algoritmo para encontrarlos. Este método se ilustra con algunos ejemplos.

Palabras Clave. Teoría de testores, algoritmos para el cálculo de testores típicos, selección de variables.

Introducción

El concepto de testor típico juega un rol muy importante en la solución de problemas de reconocimiento supervisado de patrones, cuando se usa el enfoque lógico combinatorio [1, 2]. En una aproximación básica, un testor es una colección de características que discriminan las descripciones de objetos pertenecientes a diferentes clases, y es mínimo en el orden parcial determinado por la inclusión de conjuntos. A través de las etapas de la solución de un problema de reconocimiento de patrones, los testores típicos pueden ser aplicados para satisfacer diferentes objetivos. Por ejemplo, en problemas de selección de variables [3, 4, 5] y/o para determinar los conjuntos de apoyo en los algoritmos de precedencia parcial [2]. La teoría de testores también ha sido aplicada en la minería de textos [6, 7, 8, 9].

En el enfoque lógico combinatorio, la información de un problema de reconocimiento supervisado de patrones puede ser reducida a una matriz [2]. Los testores típicos se buscan entre todos los posibles subconjuntos de columnas (características) de esta matriz. El cómputo del conjunto de todos los testores típicos pertenece a la clase de problemas NP. Cuando la dimensión de la matriz es pequeña, se han estado usando algoritmos determinísticos (DA) [3, 10, 11]. A principios de esta década comenzaron a desarrollarse algoritmos evolutivos

ISSN 1390-5384

para tratar matrices de dimensiones mayores [12, 13].

De manera similar a otros problemas NP (TSP, clique máximo, etc.) [14] es necesario tener un conjunto de instancias para probar el desempeño de los diferentes algoritmos propuestos para calcular los testores típicos. Por otro lado, teniendo estas matrices el problema de los testores típicos se convierte en un problema útil para evaluar los algoritmos estocásticos de optimización.

A pesar de esto, los autores no encontraron ningún reporte previo sobre la construcción de matrices de prueba para asesorar el desempeño de las estrategias de búsqueda de testores típicos Para el problema de los testores típicos las matrices de prueba deben ser matrices cuyo conjunto de testores típicos puede ser determinado a priori. Además, deben garantizar poder probar los aspectos que influencian el desempeño de los algoritmos tales como la dimensión de las matrices, longitud de los testores típicos, cantidad de testores típicos, etc. Este artículo está organizado de la siguiente manera: primero, introducimos formalmente el concepto de testor típico para matrices booleanas. Luego, elaboramos resultados teóricos que sirven de soporte para una herramienta útil en la construcción de matrices de prueba. Finalmente, demostramos la aplicación de esta herramienta generando algunas clases de matrices de prueba.

Metodología

Los conceptos de Testor y Testor Típico.

Sea U una colección de objetos, estos objetos se describen mediante un conjunto de n características y están agrupados en l clases. Comparando característica a característica de cada par de objetos perteneciente a diferentes clases, podemos obtener una matriz $M = [m_{ij}]_{l\times n}$ donde $m_{ij} \in \{0,1\}$ y l es el número de pares. $m_{ij} = 1\,(0)$ significa que los objetos del par denotado por i son similares (diferentes) en la característica j. Sea $I = \{i_1,\ldots,i_j\}$ el conjunto de las filas de M y $J = \{j_1,\ldots,j_n\}$ el conjunto de etiquetas de sus columnas (características). Sea $T \subseteq J$, $M_{/T}$ es la matriz obtenida de M al eliminar todas las columnas que no pertenecen al conjunto T.

Definición 1.- Un conjunto $T = \{j_{k_1},\ldots,j_{k_l}\} \subseteq J$ es un testor de M si no existe ninguna fila de ceros en $M_{/T}$.

Definición 2.- La característica $j_{k_r} \in T$ es típica con respecto a T y M si $\exists q,\, q \in \{1,\ldots,l\}$ tal que $a_{i_q j_{k_r}} = 1$ y para $s > 1$ $a_{i_q j_{k_p}} = 0, \forall p,\, p \in \{1,\ldots,s\}\; p \neq r$.

Definición 3.- Un conjunto T tiene la propiedad de tipicidad con respecto a una matriz M si todas las características en T son típicas con respecto a T y M.

Proposición 1.- Un conjunto $T = \{j_{k_1},\ldots,j_{k_l}\} \subseteq J$ tiene la propiedad de tipicidad con respecto a la matriz M si y sólo si se puede obtener una matriz identidad en $M_{/T}$, eliminando e intercambiando algunas filas.

Definición 4.- Un conjunto $T = \{j_{k_1},\ldots,j_{k_s}\} \subseteq J$ se denomina testor típico de M si es un testor y tiene la propiedad de tipicidad con respecto a M.

Sean a y b dos filas de M.

Definición 5.- Decimos que a es menor que b ($a < b$) si $\forall i\; a_i \leq b_i$ y $\exists j$ tal que $a_j \neq b_j$.

Definición 6.- a es una fila básica de M si no existe otra fila menor que a en M.

Definición 7.- La matriz básica de M es la matriz M' que sólo contiene todas las filas básicas de M.

La siguiente proposición es una caracterización de la matriz básica.

Proposición 2.- M' es una matriz básica si y sólo si para dos filas a y b cualesquiera, $a,\, b \in M'$ existen dos columnas i y j tales que $a_i = b_j = 1$ y $a_j = b_i = 0$.

Dada una matriz A, denotamos como $\Psi^*(A)$ al conjunto de todos los testores típicos de A.

Proposición 3.- $\Psi^*(M) = \Psi^*(M')$.

De acuerdo con la proposición 3, para obtener el conjunto $\Psi^*(M)$ es conveniente encontrar la matriz M' y luego luego calcular el conjunto $\Psi^*(M')$. Teniendo en cuenta que M' tiene menor o igual número de filas que M, la eficiencia de los algoritmos debe ser mayor para M' que para M. De hecho, todas las matrices de prueba generadas en este ensayo son básicas.

Operadores de matrices y sus propiedades.

Definimos el operador *fusión simple*, denotado por φ:

$$\varphi : \Re^{p\times q} \times \Re^{p\times q'} \Rightarrow \Re^{p\times (q+q')},\; q > 0,\; p > 0.$$

Dadas dos matrices $A \in \Re^{p\times q}$ y $B \in \Re^{p\times q'}$:

$$\varphi\,(A,B) = [A\,B]$$

esto es, la matriz $C = \varphi\,(A,B)$ es la matriz formada por dos bloques: A y B.

Ejemplo 1:

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \varphi\,(A,B)\,,$$

entonces:

$$C=\begin{bmatrix}1&3&1&0&0\\0&8&0&5&1\\1&0&1&6&1\end{bmatrix}$$

Propiedades del operador φ:

1. $\varphi\left(\varphi\left(A,B\right),C\right)=\varphi\left(A,\varphi\left(B,C\right)\right)=\varphi\left(A,B,C\right)$.

2. Sean A, B matrices booleanas. Si A o B son matrices básicas entonces $\varphi\left(A,B\right)$ es una matriz básica.

La primera propiedad es trivial dadas las características del operador fusión simple. La segunda propiedad puede ser demostrada con la proposición 2.

Ahora definimos el operador *fusión combinatoria*, denotada por θ:

$$\theta:\ \Re^{p\times q}\times\Re^{p'\times q'}\Rightarrow\Re^{pp'\times\left(q+q'\right)}$$

Dadas dos matrices $A=\left[a_{ij}\right]_{p\times q}$ y $B=\left[b_{ij}\right]_{p'\times q'}$. La operación θ se define como

$$\theta\left(A,B\right)=\begin{bmatrix}A\left(1,:\right)&B\left(1,:\right)\\\ldots&\ldots\\A\left(1,:\right)&B\left(p',:\right)\\\ldots&\ldots\\A\left(p,:\right)&B\left(1,:\right)\\\ldots&\ldots\\A\left(p,:\right)&B\left(p',:\right)\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

Sean

$$A=\begin{bmatrix}1&5\\0&9\\7&8\end{bmatrix}\text{ y }B=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&3&6\end{bmatrix},$$

$$C=\theta\left(A,B\right),$$

entonces

$$C=\begin{bmatrix}1&5&1&0&3\\1&5&2&3&6\\0&9&1&0&3\\0&9&2&3&6\\7&8&1&0&3\\7&8&2&3&6\end{bmatrix}$$

Propiedades del operador θ:

1. $\theta\left(\theta\left(A,B\right),C\right)=\theta\left(A,\theta\left(B,C\right)\right)=\theta\left(A,B,C\right)$.

2. Sean A y B matrices booleanas. Si A y B son matrices básicas, entonces $\theta\left(A,B\right)$ es una matriz básica.

Nótese que para esta operación ambas matrices deben ser básicas.

Sea I_n la matriz identidad $n\times n$.

Propiedades de I_n:

1. I_n es una matriz básica.

2. El número de testores típicos de I_n es igual a 1, es decir que $\left|\Psi^*\left(I_n\right)\right|=1$.

3. $\Psi^*\left(I_n\right)=\left\{J_{I_n}\right\}$ donde J_{I_n} es el conjunto de todas las etiquetas de columnas de I_n.

Una vez definidos estos operadores vamos a presentar los resultados principales de este artículo. Estos resultados constituyen el marco teórico que usamos para desarrollar las estrategias para construir las matrices de prueba.

Resultados y Discusión

Resultados teóricos en la determinación de Ψ^*

Sea Q la fusión simple de N ($N>1$) matrices $B\in\Re.^{p\times q}$, es decir, $Q=\varphi\left(\underbrace{B\ldots B}_{N}\right)$. Sea $\Psi^*\left(B\right)=\left\{T_1,\ldots,T_\nu\right\}$.

Teorema 1.- $\left|\Psi^*\left(Q\right)\right|=N^{|T_1|}+\ldots+N^{|T_\nu|}$

Demostración:

Sea $J_B=\left\{j_1,\ldots,j_q\right\}$ el conjunto de todas las columnas de B, entonces:

$$\begin{aligned}J_Q\ &=\ \{j_1,\ldots,j_q,j_{q+1},\ldots,j_{2q},\\&\quad\ldots,j_{(N-1)q+1},j_{(N-1)q+2},\ldots,j_{Nq}\}\end{aligned}$$

El conjunto J_Q se puede particionar en q clases

$$\begin{aligned}J_Q^1\ &=\ \left\{j_1,j_{q+1},\ldots,j_{(N-1)q+1}\right\},\\J_Q^2\ &=\ \left\{j_2,j_{q+2},\ldots,j_{(N-1)q+2}\right\},\ldots,\\J_Q^q\ &=\ \left\{j_q,j_{2q}\ldots,j_{Nq}\right\}.\end{aligned}$$

Todas las columnas en la misma clase J_Q^k son idénticas y $\left|J_Q^k\right|=N\ ,\forall k\in\left\{1,\ldots,q\right\}$. Por otro lado, considerando la manera en que se construyó Q se tiene $\Psi^*\left(B\right)\subset\Psi^*\left(Q\right)$. Ahora generamos el conjunto $G\left(\Psi^*\left(B\right)\right)$. $G\left(\Psi^*\left(B\right)\right)$ contiene $\Psi^*\left(B\right)$ y cualquier conjunto de etiquetas T' obtenida de la sustitución de una columna de cualquier T_i, $i=1,\ldots,\nu$ por cualquier columna en su misma clase. Teniendo en cuenta la definición de testor típico, T' es un testor típico de Q, por lo tanto $G\left(\Psi^*\left(B\right)\right)\subseteq\Psi^*\left(Q\right)$. Hay N candidatos para seleccionar cada una de las $|T_i|$ columnas de T_i,entonces $\left|G\left(\Psi^*\left(B\right)\right)\right|=N^{|T_1|}+\ldots+N^{|T_\nu|}$.

Ahora pasamos a demostrar que $\Psi^*\left(Q\right)\subseteq G\left(\Psi^*\left(B\right)\right)$. Supongamos que existe un conjunto T' tal que $T'\in$

$\Psi^*(Q)$ y $T' \notin G(\Psi^*(B))$. El conjunto T' no puede contener dos columnas de la misma clase puesto que la propiedad de tipicidad de T' no sería satisfecha. Entonces todas las columnas de T' son de distintas clases. Para cada columna de T' consideremos el miembro de su clase que pertenece a B. Llamamos T'_B a este conjunto. Si T'_B es un testor típico de B, entonces $T' \in G(\Psi^*(B))$ lo que contradice nuestra suposición. Por otro lado, si T'_B no es un testor típico de B entonces T'_B no es un testor típico de Q. Teniendo en cuenta que $Q_{/T'} = Q_{/T'_B}$, T' no es un testor típico de Q por definición, lo cual también contradice nuestra suposición. Entonces $\Psi^*(Q) \subseteq G(\Psi^*(B))$. Por lo tanto $\Psi^*(Q) = G(\Psi^*(B))$ y $|\Psi^*(Q)| = |G(\Psi^*(B))| = N^{|T_1|} + \ldots + N^{|T_\nu|}$. Fin de la demostración.

Ejemplo 3:

Sean

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} Q &= \varphi(B,B,B) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Psi^*(Q) = 27.$$

Sean $A_1, \ldots, A_m$ m matrices tales que $A_i = I_{n_i} \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Sean $J_{A_1}, \ldots, J_{A_m}$ el conjunto de todas las columnas de estas matrices y $\{J_{A_i} \cap J_{A_j}\} = \emptyset$ $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j$.

Sea A la matriz obtenida al aplicar el operador fusión combinatoria a las matrices A_i, es decir:

$$A = \theta(A_1, \ldots, A_m).$$

Teorema 2.- $\Psi^*(A) = \{\Psi^*(A_1), \ldots, \Psi^*(A_m)\} = \{J_{A_1}, \ldots, J_{A_m}\}$

Demostración:

Dada la forma en que se construyó la matriz A, esta matriz se puede separar en m submatrices: La submatriz A_1^+ que contiene las primeras n_1 columnas de A, la matriz A_2^+ que contiene las siguientes n_2 columnas de A y así hasta la submatriz A_m^+ que contiene las últimas n_m columnas de A. Se puede ver que A_i^+ solo incluye filas de A_i $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $J_A, J_{A_1^+}, \ldots, J_{A_m^+}$ el conjunto de columnas y I_A, $I_{A_1^+}$, $\ldots, I_{A_m^+}$ el conjunto de filas de las matrices A, $A_1^+, \ldots, A_m^+$ respectivamente. Ahora demostremos que:

1) $J_A, J_{A_1^+}, \ldots, J_{A_m^+} \in \Psi^*(A)$

2) $\Psi^*(A) \setminus \left\{J_A, J_{A_1^+}, \ldots, J_{A_m^+}\right\} = \emptyset$.

Teniendo en cuenta que $\forall i$, $i = 1, \ldots, m$, $I_{A_i^+} = I_{A_i}$; la submatriz de A determinada por las columnas de $J_{A_i^+}$ no contiene filas de ceros y cada etiqueta de columna de $J_{A_i^+}$ cumple con la propiedad de tipicidad, entonces $J_{A_i^+} \in \Psi^*(A)$. La condición 1) está demostrada, pasamos a demostrar la condición 2).

Supóngase que existe un conjunto $T \in \Psi^*(A)$ y $T \neq J_{A_i^+}$, $i = \{1, \ldots, m\}$. Considerando las propiedades de los testores típicos; $\forall i$, $J_{A_i^+} \subsetneq T$, por lo tanto $\forall i\ \exists j_i \in A_i^+$ tal que $j_i \notin T$. Tomamos la fila s_m donde $s_m = (s_{m-1} - 1)n_m + j_m$ y $s_1 = j_1$. Teniendo en cuenta las características del operador fusión combinatoria, la fila s_m de A tiene un 1 en cada columna j_i y ceros en el resto de columnas, incluídas las columnas de T. Esto significa que existe una fila de ceros en $A_{/T}$, por lo que T no es un testor. La suposición de que existe $T \in \Psi^*(A)$ es falsa. Fin de la demostración.

Ejemplo 4:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Psi^*(A_1) &= \{x_1, x_2\}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Psi^*(A_2) &= \{x_3, x_4, x_5\} \end{aligned}$$

Sea $A = \theta(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\Psi^*(A) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$.

Corolario 1.- $|\Psi^*(A)| = m$.

Corolario 2.- $\left|\Psi^*\left(\varphi\left(\underbrace{A \ldots A}_{N}\right)\right)\right| = N^{n_1} + \ldots + N^{n_m}$.

Hemos terminado la presentación de un conjunto de resultados teóricos que son simples en su formulación. Aún así, constituyen una herramienta flexible y poderosa para la construcción de matrices de prueba.

Ejemplos de generación de matrices de prueba. En esta sección se presentan algunas recetas para usar los resultados previos en la evaluación de los algoritmos de búsqueda de testores típicos. Cada receta muestra cómo evaluar una característica específica de las matrices que puede influenciar en el desempeño de los algoritmos.

Estas matrices tienen pocos testores típicos que pueden ser determinados fácilmente.

Matrices con la misma dimensión y diferente número de testores típicos.

Supóngase que es necesario estudiar el desempeño de los algoritmos cuando el número de testores típicos aumenta. Para analizar la situación, se generan dos matrices de la misma dimensión con una diferencia grande en el número total de testores típicos de cada una. Las matrices Q_1 y Q_2 se generan cumpliendo las siguientes condiciones:

1.- $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$.

2.- $|\Psi^*(Q_1)| \neq |\Psi^*(Q_2)|$

Dadas estas dos condiciones, proponemos un procedimiento para crear estas matrices Q_1 y Q_2. Empezando por dos matrices simples B_1 y B_2 con la misma dimensión y distinto número de testores típicos, aplicamos el operador φ a cada matriz N veces, obteniendo Q_1 y Q_2.

Ilustramos con el siguiente ejemplo:

B_1 se toma como I_4 y $B_2 = \theta(I_2, I_2)$, entonces:

$$Q_1 = \varphi\left(\underbrace{B_1 \ldots B_1}_{N}\right) \text{ y } Q_2 = \varphi\left(\underbrace{B_2 \ldots B_2}_{N}\right).$$

Nótese que:

$\dim(Q_1) = \dim Q_2 = 4 \times 4N$

$\Psi^*(Q_1) = N^4$ y $\Psi^*(Q_2) = 2N^2$

Matrices con diferente dimensión y mismo número de testores típicos.

En este caso el objetivo es estudiar el desempeño de los algoritmos cuando el número de testores típicos a encontrar es el mismo, pero las matrices tienen diferente dimensión.

Dos matrices Q_1 y Q_2 se generan cumpliendo las siguientes condiciones:

1.- $\dim(Q_1) \neq \dim(Q_2)$.

2.- $|\Psi^*(Q_1)| = |\Psi^*(Q_2)|$

De manera similar al ejemplo anterior, el procedimiento empieza con dos matrices simples: las matrices identidad I_{n_1} e I_{n_2}. El operador φ se aplica a ambas matrices N_1 y N_2 veces respectivamente, obteniendo Q_1 y Q_2.

Para satisfacer ambas condiciones es necesario que $n_1 \neq n_2$ y $N_1^{n_1} = N_2^{n_2}$ (Corolario 2).

Por ejemplo, podemos escoger los siguientes parámetros: $n_1 = 2$, $N_1 = 9$, $n_2 = 4$, $N_2 = 3$.

Matrices con dimensión alta y pocos testores típicos.

Estas matrices son importantes para estudiar la sensibilidad de los algoritmos en problemas con pocas soluciones (testores típicos) y un espacio de búsqueda de dimensión alta. Pueden ser formadas aplicando el operador fusión combinatoria a un conjunto de matrices identidad de dimensión relativamente alta: sea $Q = \theta(I_{n_1}, \ldots, I_{n_2})$, entoces $\dim(Q) = (n_1 \ldots n_m) \times (n_1 \ldots n_m)$ y $|\Psi^*(Q)| = m$.

Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un método general para crear matrices de prueba para evaluar el desempeño de estrategias de búsqueda de testores típicos. El método propuesto está basado en resultados teóricos que son simples en su formulación. A pesar de esto, estos resultados son una base sólida para obtener diferentes instancias que nos permiten probar varios casos del problema de búsqueda de testores típicos.

Hemos presentado algunos ejemplos que ilustran cómo generar la instancia necesaria para probar la influencia de una característica particular en el algoritmo de búsqueda de testores típicos.

Teniendo en cuenta que hemos introducido una herramienta general y flexible para la construcción de matrices de prueba, esperamos que este trabajo permita convertir al problema del testor típico en un punto de referencia para la evaluación de algoritmos de optimización estocásticos.

Referencias

[1] A. N. Dmitriev, Y. I. Zhuravlev and F. Krendeleiev 1966. “On the mathematical principles of patterns and phenomena classification.” *Diskretnyi Analiz.* 7, 3-15.

[2] J. Ruiz, M. Lazo, E. Alba. 2001. “An overview of the concept of testor.” *Pattern Recognition*. 34, 13-21.

[3] M. Lazo, J. Ruiz. 1995. “Determining the feature relevance for non classically described objects and a new algorithm to compute typical fuzzy testors.” *Pattern Recognition Letters*. 16, 1259-1265.

[4] A. Carrasco, J. Martínez 2004. “Feature selection for natural disaster texts classification Using testors.” Intelligent Data Engineering and Automated Learning. Springer- Verlag. 8, 424-429.

[5] R. Vázquez, S. Godoy. 2007. “Using testor theory to reduce the dimension of neural network models.” *Special Issue in Neural Networks and Associative Memories*. 28, 93-103.

[6] J. Santos, A. Carrasco, J. Martínez. 2004. “Feature selection using typical testors applied to estimation of stellar parameters.” *Computación y Sistemas*. 8, 015-023.

[7] A. Pons, R. Gil, R. Berlanga. 2007. “Using typical testors for feature selection in text categorization.” Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications. 12th Iberoamericann Congress on Pattern Recognition. Springer Verlag.

[8] A. Pons, J. Ruiz, R. Berlanga. 2004. “A method for the automatic summarization of topic-based clusters of documents.” 8th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition. Springer Verlag. 596-603.

[9] F. Li, Q. Zhu, X. Lin. 2009. “Topic discovery in research literature based on non-negative matrix factorization and testor theory.” Asia-Pacific Conference on Information Processing. 2, 266–269.

[10] Sánchez, G. 1997. “Efficient algorithms to calculate typical testors from a basic matrix.” Design and program. Master thesis. BUAP, México.

[11] L. Morales, G. Sánchez. 2007. “FS-EX plus: A new algorithm for the calculation of typical FS-testor set.” Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications. 12th Iberoamericann Congress on Pattern Recognition. Springer Verlag.

[12] G. Sánchez, M. Lazo, O. Fuentes. 1999. “Genetic algorithm to calculate minimal typical testors.” Proceedings of the IV Iberoamerican Symposium on Pattern Recognition. 207-214.

[13] E Alba, R. Santana, A. Ochoa, M. Lazo. 2000. “Finding typical testors by using an evolutionary strategy.” Proceedings of the V Ibero American Symposium on Pattern Recognition. 267-278.

[14] M. Garey, D. Johnson. 1979. “Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness” W. H. Freeman and Company. New York, NY.