

Leyes Empíricas de Potencia y Escalamiento de Quito, Guayaquil y otras ciudades de Ecuador

Felipe Vaca Ramírez^{1*}, Bolívar Morales Oñate¹, Carlos Jiménez Mosquera¹

¹Universidad San Francisco de Quito, Colegio de Ciencias e Ingeniería - El Politécnico. Diego de Robles y Vía Interoceánica, Campus Cumbayá, Quito, Ecuador

*Autor para correspondencia, correo electrónico: felipevacar@gmail.com

Editado por/Edited by: Cesar Zambrano, Ph.D.

Recibido/Received: 2015/04/22. Aceptado/Accepted: 2015/05/09.

Publicado en línea/Published online: 2015/05/22 Impreso/Printed: 2015/06/01

Empirical Power and Scaling laws of Quito, Guayaquil and other cities in Ecuador

Abstract

Several papers have shown that distributions characterized by mean and variance are inappropriate for accounting spatial or geographic patterns. The reason is data is not accumulated around a central value; rather, tails become heavy and extreme events result less unlikely than under other distributions. In this sense, this work aims to find empirical laws on some relevant variables of cities in Ecuador. For this purpose, we start from two hypothesis: 1) some socioeconomic variables scales from a size variable, and 2) such variables follow a power law distribution; then estimate needed parameters, and carry out contrasts with adequate heavy tail distributions.

Keywords. power laws, scaling, city, socioeconomic variables

Resumen

Numerosos trabajos han mostrado que las distribuciones de probabilidad caracterizadas por la media y varianza resultan inadecuadas para expresar regularidades asociadas a variables de tipo geográfico o espacial. Esto se debe a que los datos no se aglomeran alrededor de un valor central; más bien, las colas se vuelven pesadas y los eventos extremos resultan ser menos improbables que a partir de otras distribuciones. Bajo esta consideración, el presente trabajo apunta a encontrar leyes empíricas sobre algunas variables relevantes de ciudades de Ecuador. Para ello, se parte de dos hipótesis: 1) ciertas variables socioeconómicas se escalan a través de una variable de tamaño y 2) dichas variables se distribuyen bajo una ley potencia; se estiman los parámetros requeridos y se contrastan otras distribuciones de cola pesada que ajusten adecuadamente los datos escogidos.

Palabras Clave. leyes potencia, escalamiento, ciudad, variables socioeconómicas

1 Introducción

De acuerdo a Bettencourt [1] la forma de conceptualizar las ciudades posee gran importancia en la medida en que esto determina cómo se plantean soluciones a los problemas urbanos. Se distinguen dos enfoques principales: el primero considera a la ciudad como un organismo o máquina, con lo cual resulta posible controlarla y restringir su evolución; mientras el segundo la concibe como un ecosistema.

Este artículo considera el segundo enfoque al plantear que las ciudades son sistemas complejos no limitados (de antemano) en términos de tamaño, en particular grandes redes sociales.

Una forma de abordar la complejidad inherente a las ciudades consiste en utilizar de modelos de escalamiento y de manera particular, distribuciones tipo potencia

para caracterizar a variables urbanas, pues las variables de tipo geográfico o espacial no suelen aglomerarse alrededor de un valor. Considerar este modelo no sólo es relevante por el vasto número de áreas en las cuales ha sido aplicado [2]; sino también porque: “la ley potencia tiene propiedades particulares que la hacen incluso más atractiva en el sentido que tiende a ser aplicable a sistemas que se escalan, que manifiestan auto-similaridad a diferentes escalas y que pueden ser generados como fractales” [3].

Indicios visuales (diagramas de dispersión, histogramas y gráficos de Zipf¹ en escala logarítmica) apoyan la hipótesis de que los datos se distribuyen bajo una ley potencia. Este artículo busca caracterizar la escala de varias variables relevantes para varias ciudades del Ecu-

¹Gráfico de la frecuencia de las observaciones vs los rankings de las mismas.

dor. En las siguientes secciones se presentan la estimación de los parámetros respectivos, pruebas de ajuste y contrastes con otras distribuciones de cola pesada.

2 Aspectos Teóricos y Metodológicos

Una función, $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es invariante al escalamiento si para cualquier constante $c > 0$, $f(cx) \propto f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si la función es diferenciable se puede mostrar que la única forma funcional posible para una función invariante a la escala es que sea en forma de potencia

$$f(x) = kx^\alpha. \tag{1}$$

Por lo tanto si dos funciones son invariantes a la escala con un mismo exponente son la misma función excepto por una constante y posiblemente sean producidas por el mismo mecanismo. Esa es una de las razones principales de estudiar relaciones de escalamiento. Además, se puede caracterizar las relaciones de escalamiento según el exponente α en: lineales si $\alpha = 1$, sublineales si $\alpha < 1$ y superlineales si $\alpha > 1$, esta división también puede implicar que los mecanismos que generan las relaciones de potencia son similares.

Esta idea del escalamiento se la puede extender a distribuciones de probabilidad. Una variable aleatoria continua, X , tiene una distribución de probabilidad de tipo potencia, si su función de densidad de probabilidad, $f(x)$, está dada por:

$$f(x) = Cx^{-\alpha}, x \geq x_{min} > 0, \tag{2}$$

donde

$$C = \frac{\alpha - 1}{x_{min}^{-\alpha+1}}, \tag{3}$$

para un exponente de escalamiento, $\alpha > 1$. En este caso su función de distribución acumulada complementaria (CDF) está dada por:

$$\bar{F}(x) = Pr(X \geq x) = \int_x^\infty f(u) du, \tag{4}$$

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha+1}. \tag{5}$$

donde C es una constante de normalización, x_{min} es el valor de la variable a partir del cual los datos se distribuye bajo una ley potencia y α es el exponente o parámetro de escalamiento ($\alpha > 1$).

Para una variable discreta, la función de densidad de probabilidad es:

$$p(x) = Pr(X = x) = Cx^{-\alpha} \tag{6}$$

$$p(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\zeta(\alpha, x_{min})} \tag{7}$$

para $x \geq x_{min}$, y la función de distribución acumulada complementaria (CDF):

$$\bar{F}(X) = Pr(X \geq x) = \frac{\zeta(\alpha, x)}{\zeta(\alpha, x_{min})}. \tag{8}$$

α y x_{min} se definen como en el caso continuo, mientras la función zeta generalizada o de Hurwitz se define como:

$$\zeta(\alpha, x_{min}) = \sum_{n=0}^\infty (n + x_{min})^{-\alpha}$$

2.1 Metodología

2.1.1 Escalamiento En la práctica, si se busca estimar la constante de escalamiento α en la ecuación (1) se ha usado generalmente logaritmos para estimar una relación de la forma

$$\ln(y_i) = k + \alpha \ln(x_i) + \epsilon_i, \tag{9}$$

donde (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ son los datos, k es una constante, α es el parámetro de escalamiento y ϵ_i son errores independientes e idénticamente distribuidos, que se asumen normales si no hay una muestra suficientemente grande para usar estadísticas asintóticas. Sin embargo se ha sugerido [4], por lo menos en el campo de la biología, que a veces puede ser mejor usar un método de estimación no lineal, cuando los error no son multiplicativos sino aditivos en la ecuación original (1).

2.1.2 Ley de potencia Un procedimiento usual para estimar el parámetro de escalamiento α en la ecuación (2) consiste en utilizar mínimos cuadrados ordinarios (MCO) en la ecuación

$$\ln(f(x)) = c + \alpha \ln(x) + \epsilon, \tag{10}$$

Este procedimiento aplicado a una ley potencia da lugar a errores sistemáticos y potencialmente grandes, a saber: subestimaciones de los parámetros, imposibilidad de calcular errores estándar, escaso poder de información del R^2 de la regresión y violación de restricciones de normalización respecto a los valores de la función de distribución acumulada complementaria [2].

Tras haber confirmado las falencias de MCO mediante simulaciones, se optó por seguir la metodología propuesta por Clauset, Shalizi y Newman (2009), [2], para analizar de distribuciones de cola pesada. De manera general, dicha metodología consiste en:

1. Estimación del parámetro x_{min} . Dos criterios han sido utilizados para dicha estimación. El primero se basa en la distancia entre las funciones de distribución acumulada teórica y empírica y contempla los estadísticos de Kolmogorov - Smirnov (KS),

Kuiper (V) y Anderson-Darling (A^2).² Una referencia del desempeño de estos estadísticos puede revisarse en [2]. Los estadísticos mencionados se definen de la siguiente manera:

$$KS = \max_{x \geq x_{min}} |F_n(x) - F(x)| \quad (11)$$

$$A^2 = \sum_{x \geq x_{min}} \frac{(F(x) - F_n(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} \quad (12)$$

$$V = \max_{x \geq x_{min}} (F(x) - F_n(x)) - \min_{x \geq x_{min}} (F(x) - F_n(x)), \quad (13)$$

donde $F_n(x)$ es la función de distribución empírica de los datos, CDF, para $x \geq x_{min}$ y $F(x)$ es la CDF del modelo ley potencia de mejor ajuste para $x \geq x_{min}$. Así, \hat{x}_{min} es aquel valor de x_{min} que minimiza el estadístico de distancia utilizado. El segundo enfoque de estimación considera el criterio de información Bayesiano (BIC) definido por:

$$BIC = L - \frac{1}{2} x_{min} \ln(n), \quad (14)$$

donde L es el valor de log-verosimilitud en el máximo y n el número de observaciones que se encuentran en la cola. Se selecciona aquel x_{min} que maximiza BIC.

2. Estimación del parámetro de escalamiento α por el método de máxima verosimilitud.
3. Realización de pruebas de ajuste a fin de determinar si la distribución potencia es una hipótesis plausible para los datos, es decir, la diferencia entre los datos y el modelo puede ser únicamente atribuida a fluctuaciones estadísticas. Para ello, se generan muestras aleatorias partiendo de la distribución tipo potencia cuyos parámetros se estimaron en los dos pasos anteriores. Posteriormente se ajusta un modelo de tipo potencia a cada muestra y se calcula KS para todas las muestras y datos empíricos. El p-valor corresponde a la fracción de las distancias (KS) asociadas a muestras aleatorias que son mayores que la distancia correspondiente a los datos observados. Si el p-valor es pequeño se descarta hipótesis de ley potencia.
4. Si la distribución potencia es un ajuste plausible para los datos se comparan hipótesis alternativas a través de ratios de verosimilitud (prueba de Vuong [5]). Se utiliza el logaritmo de dicho ratio y se prueba si éste está lo suficientemente lejos de 0. Si es así, el p-valor asociado es pequeño y el signo del estadístico de la prueba es un indicador confiable de qué modelo es el que mejor ajusta los datos.

3 Datos

Los datos utilizados en el presente trabajo provienen de dos fuentes principales: 1) Censo de Población y Vivienda 2010, en particular lo correspondiente a la zona urbana de las cabeceras provinciales de Ecuador. Las variables utilizadas por sector censal son: número de viviendas ($nviv_s$), área ($area$), Población ($poblacion_s$), Porcentaje de viviendas sin acceso agua por red pública ($noagua_s$), Porcentaje de viviendas sin acceso alcantarillado ($noalcant_s$), Porcentaje de hogares pobres ($hog.pobres_s$), Porcentaje de hogares en pobreza extrema ($hog.pobres.ext_s$). 2) Bases de datos de Movilidad y delitos contra el patrimonio proporcionadas por el Municipio del Distrito Metropolitano de Quito. La unidad de análisis es de tipo geográfico, a saber: sector censal, zonas o barrios, según la fuente lo permite. Cabe mencionar que, las estimaciones correspondientes fueron realizados mediante las funciones de los paquetes *powerLaw* de R y *powerlaw* de Python.

4 Resultados

4.1 Escalamiento

Para establecer las relaciones de escalamiento, (2), se usaron como variables de tamaño a la población, a la área y al número de viviendas con las variables socio-económicas utilizadas en este trabajo. Las figuras 1-3 muestran las relaciones entre las variables de tamaño y dichas variables para los sectores censales en las respectivas ciudades capitales provinciales del Ecuador. En los gráficos se busca distinguir por colores a las diversas capitales, pero hay sobreposición de colores por lo que es difícil establecer claramente a qué capital pertenece cada dato. La heterocedastidad aparente es debida en su mayoría a que se agrupan datos de diversas ciudades. Se ajustó la ecuación (9) usando mínimos cuadrados, para cada capital provincial, las líneas que aparecen en los gráficos corresponden a estos ajustes, solo se muestran líneas cuya pendiente es significativa con un valor-p menor a 5%/22, ya que hay 22 capitales provinciales. Además se ajustó un modelo de medidas repetidas para establecer un valor de α de la ecuación de escalamiento (2), en todos los sectores censales del país, los resultados aparecen en la tabla (2). De los gráficos se puede establecer la alta relación entre en número de viviendas, el área y la población en los setores censales. De los gráficos también se infiere en para bastantes relaciones el escamiento es el mismo, lo que difiere es la constante en la ecuación (2), véase por ejemplo la relación entre hacinamiento y número de viviendas o entre área y porcentaje de hogares pobres o hacinamiento y población.

Resulta interesante observar que los patrones se reproducen a distinta escala en la medida en que las estimaciones y gráficos a nivel país y por cantón presentan alta semejanza.

De los resultados de estimación, se extraen en su mayoría:

²Clauset, Shalizi y Newman (2009) únicamente utilizan KS.

- Relaciones superlineales entre la población y otros indicadores tanto a nivel país (en promedio 1.13) como a nivel cantonal, especialmente en las regiones Costa y Oriente.
- Relaciones sublineales entre el área geográfica y otros indicadores tanto a nivel país como cantonal (siendo Loja la ciudad más vulnerable); destacándose el no acceso a agua por red pública y no acceso alcantarillado.
- Relaciones sublineales entre el número de viviendas y otros indicadores a nivel país (en promedio 0.88), pero relaciones superlineales nivel cantonal, sobre todo en aquellas ciudades de la Costa y Oriente.

A estos resultados cabe adicionar el hecho de que en promedio las unidades internas (sectores) de las ciudades tienden a ser menos sensibles a condiciones desfavorables (en términos de servicios básicos y pobreza) al crecer, es decir crecen más lento que la ciudad, posiblemente porque poseen mayor actividad económica, infraestructura y flujo de recursos.

Cabe notar que en general, los exponentes de escalamiento de ciudades “grandes” como Quito y Cuenca resultan ser menores que los del resto de ciudades. Si bien es cierto, Guayaquil también es una ciudad grande, ésta únicamente es la menos sensible en la región Costa, pero no a nivel nacional. Análogamente a lo hallado en trabajos previos, estas ciudades tenderían a ser más atractivas por las características mencionadas, conllevando un mayor flujo de inmigrantes, a pesar de existir costos y/o problemas que en ciudades pequeñas son menos preponderantes como: mayor distancia de movilización, tráfico vehicular, contaminación, delitos, etc.

4.2 Distribuciones Potencia

Para mostrar el tipo de datos a los que se ajusta una ley de potencia usamos los datos sobre ingresos mensuales en el Distrito de Quito Metropolitano del 2013. Figura 4 muestra el histograma de los datos con una estimación no paramétrica de la densidad. Es claro que los ingresos tiene una distribución de cola pesada. Se ajustó una distribución de potencia y una distribución lognormal. En la figura 5 se puede apreciar el ajuste de las dos distribuciones a los datos; para la ley de potencia el $x_{min} = 780$, sin embargo para la ley lognormal es $x_{min} = 409$, es decir se incluyen más observaciones para la ley lognormal. Es claro en el gráfico que ambas distribuciones ajustan los datos razonablemente bien y es difícil escoger una sobre la otra, sin embargo la ley de potencia usa un solo parámetro y por el principio de parsimonia estaríamos inclinados a favor de la ley de potencia.

Los primeros indicios que apoyan la hipótesis de distribuciones de probabilidad con colas pesadas provienen de inspecciones visuales sobre histogramas y gráficos

de Zipf, Figuras 6 y 7 ; sin embargo, estos no son evidencia suficiente para concluir a favor de dicha hipótesis.

Las estimaciones del parámetro α para la ley de potencia (ecuación 2) para las capitales provinciales del Ecuador en nueve variables se encuentran en la tabla 5. Analizando los valores-p se encuentra que excepto el perímetro y las viviendas sin alcantarillado las demás siete variables se pueden modelar por una ley de potencia. Para futuros análisis es interesante establecer el α promedio es el coeficiente de variación para cada una de las variables, tabla 5.

Siguiendo a [2], la estimación de parámetros y realización de pruebas de hipótesis muestra que la distribución potencia resulta plausible y más adecuada que otras distribuciones de cola pesada en varios indicadores de las ciudades del Ecuador (véanse regiones de color verde sobre los mapas de la Figura 8). Sin embargo, es necesario considerar aquellos casos en los que la cola comprende un número y porcentaje “significativo” de datos³, a fin de localizar eventos grandes que resultan ser más frecuentes de lo esperado. Parece posible que una ley de potencia sea plausible en general y mejor en muchos casos para ajustes de cola pesada a las variables consideradas.

Se llevó a cabo un análisis de conglomerados, usando el método de mezclas de distribuciones gaussianas [6], para establecer si los valores α estimados según la ley de potencia aglomeran a las ciudades de forma plausible y/o interesante. La aglomeración óptima usa siete conglomerados que se muestran en el panel izquierdo de la Figura 9. Posiblemente siete agrupaciones sean demasiadas, pero aún así son interesantes las aglomeraciones encontradas, por ejemplo se aglomeran claramente ciudades de la Costa ecuatoriana como Machala, Guayaquil, Babahoyo, Sta. Elena. Además, en general, las aglomeraciones contienen ciudades en provincias que tienen alguna conexión geográfica. En el panel derecho de la Figura 9, se muestran los conglomerados obtenidos cuando se los aglomera en dos grupos; si se usa como criterio para escoger al número de conglomerados al BIC (Bayes Information Criteria) no hay agrupaciones mejores a la de dos conglomerados hasta que se usan siete conglomerados. En esta formación el conglomerado de las ciudades de la Costa ecuatoriana descrito anteriormente más Sto. Domingo y Macas aparece nuevamente, indicando una cierta estabilidad. El otro conglomerado agrupa a todas las demás provincias. Es posible que los coeficientes α de la ley de potencia capturan algo del carácter geográfico de las ciudades del Ecuador.

En el caso de número delitos contra el patrimonio de Quito, la distribución potencia resulta ser plausible únicamente para la cuarta parte de las observaciones del año 2010. Esto obliga a descartar la hipótesis de ley potencia para este indicador. Para el número de viajes

³Se impone un umbral de por lo menos 20 observaciones en la cola

por zona ⁴, se toman en cuenta los viajes totales y las desagregaciones por distintos medios de transporte (taxi, transporte público, transporte privado y busetas escolares). La ley potencia resulta tener presencia significativa en el total viajes en transporte público por zona dando indicios de concentración de tráfico vehicular en zonas centrales. La tabla que se presenta al final estos puntos.

En relación a los los parámetros (x_{min} y α) obtenidos por otros métodos de estimación (V, A^2 y BIC; véanse ecuaciones 12, 13 y 14), estos son cercanos a los resultados de KS, aunque es notorio que BIC es el que más difiere del resto; por el contrario, las diferencias son importantes en cuanto a la plausibilidad de la distribución potencia, siendo más altas bajo KS (Figuras 10 - 11).

5 Conclusiones

Los resultados muestran que la hipótesis de escalamiento de un indicador socioeconómico a través del tamaño de la ciudad resulta más robusta que la de distribución de probabilidad bajo una ley potencia, aunque ésta última resulte consistente con algunas de las características de las urbes de Ecuador.

Si bien es cierto los resultados no son concluyentes, estos dan pie para indagar sobre: una posible concentración de indicadores, los mecanismos y dinámicas que generan escalamiento y posibles patrones geográficos asociados a la plausibilidad de la ley potencia.

Referencias Bibliográficas

- [1] Bettencourt 2013. The kind of problem a city is. SFI Working Paper. Santa Fe Institute.
- [2] Clauset, A., Shalizi, C. R., and Newman, M. E. 2009. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*. 51(4), 661–703.
- [3] Batty 2014. Scale, power laws, and rank size in spatial analysis. CASA Working Paper 195. University College London.
- [4] Xiao, X., Ethan P. W., Mevin B., H., and Durham, S. L. 2011. On the use of log-transformation vs. nonlinear regression for analyzing biological power laws. *Ecology*. 92, 18871894.
- [5] Vuong, Q. 1989. Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses. *Econometrica*. 57, 307–333.
- [6] Fraley, C. and Raftery, A. E. 2002. Model-based clustering, discriminant analysis, and density estimation. *Journal of the American Statistical Association*. 97, 611:631.
- [7] Ma, K., Wang, Z., Jiang, J., Zhu, G., and Li, W. 2011. Power law and small world properties in a comparison of traffic city networks. *Chinese Science Bulletin*. 56(34), 3731–3735.
- [8] Alstott, J., Bullmore, E., and Plenz, D. 2014. powerlaw: a python package for analysis of heavy-tailed distributions. *PLoS one*. 9(1), e85777.
- [9] Bentley, R. A., Ormerod, P., and Batty, M. 2011. Evolving social influence in large populations. *Behavioral ecology and sociobiology*. 65(3), 537–546.
- [10] Gillespie, C. S. 2014. Fitting heavy tailed distributions: the powerLaw package. arXiv preprint arXiv:1407.3492.
- [11] Newman, M. E. 2005. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Contemporary physics*. 46(5), 323–351.
- [12] Observatorio Metropolitano de Seguridad Ciudadana del Municipio del Distrito Metropolitano de Quito. Delitos contra el patrimonio. Base de datos. 2010-2013.
- [13] Shiode, B. M. 2000. Power law distributions in real and virtual worlds. Casa working paper 19. University College London.
- [14] Gabaix, X. 2008. Power laws in economics and finance. Technical report. National Bureau of Economic Research.
- [15] Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC). Censo de Población y Vivienda. Base de datos. 2010.
- [16] Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC). Geodatabase Empatada Nacional. Información Cartográfica. Versión 2.
- [17] Instituto de la Ciudad del Municipio del Distrito Metropolitano de Quito. Matriz de origen destino. Base de datos.
- [18] Schläpfer, M., Bettencourt, L., Grauwin, S., Raschke, M., Claxton, R., Smoreda, Z., West, G. B., and Ratti, C. 2012. The scaling of human interactions with city size. arXiv preprint arXiv:1210.5215.
- [19] Stumpf, M. P. and Porter, M. A. 2012. Critical truths about power laws. *Science*. 335(6069), 665–666.

⁴Véase [7] para un análisis de la distribución del grado de los nodos sobre una red de transporte público

Apéndice

Variable dependiente	α	Error Estándar	R^2
Área	0.85	0.10	0.20
Población	0.95	0.03	0.64
Sin agua potable	0.49	0.29	0.24
Sin alcantarillado	0.86	0.31	0.29
Hacinamiento	0.75	0.16	0.17
Perímetro	0.47	0.06	0.18
Hogares pobres	0.75	0.13	0.26
Hogares extrema pobreza	0.07	0.27	0.22

Variable de tamaño: Área			
Variable dependiente	α	Error Estándar	R^2
Población	0.13	0.01	0.14
Sin agua potable	1.16	0.09	0.31
Sin alcantarillado	1.59	0.09	0.38
Hacinamiento	0.22	0.05	0.15
Perímetro	0.60	0.01	0.92
Hogares pobres	0.42	0.04	0.26
Hogares extrema pobreza	0.99	0.08	0.26

Variable de tamaño: Población			
Variable dependiente	α	Error Estándar	R^2
Sin agua potable	0.64	0.24	0.25
Sin alcantarillado	1.14	0.25	0.34
Hacinamiento	1.05	0.13	0.28
Perímetro	0.54	0.05	0.18
Hogares pobres	0.89	0.10	0.37
Hogares extrema pobreza	0.73	0.22	0.27

Tabla 1: Escalamiento de ciudades de Ecuador. Estimaciones a a nivel país. Variable de tamaño: Número de viviendas

ciudad	Área		Población		Viviendas sin acceso a agua		Viviendas sin acceso a alcantarillado		Hogares pobres		Hogares en pobreza extrema	
	α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α	p- val α
Cuenca	0.852	0.000	0.951	0.000	0.220	0.175	0.463	0.015	0.661	0.000	0.135	0.334
Tulcán	0.436	0.100	0.974	0.000	0.666	0.022	0.651	0.117	1.017	0.000	1.236	0.001
Latacunga	0.032	0.900	0.913	0.000	0.010	0.975	-0.568	0.129	0.632	0.006	-0.093	0.768
Riobamba	0.663	0.000	0.944	0.000	0.271	0.217	-0.048	0.820	0.572	0.000	0.244	0.153
Machala	0.272	0.091	1.027	0.000	0.852	0.004	1.429	0.000	1.184	0.000	1.426	0.000
Esmeraldas	0.935	0.000	1.008	0.000	1.112	0.000	1.433	0.000	1.201	0.000	1.456	0.000
Guayaquil	0.747	0.000	1.083	0.000	0.665	0.000	1.750	0.000	1.237	0.000	1.414	0.000
Ibarra	1.060	0.000	1.043	0.000	0.905	0.003	1.236	0.000	1.313	0.000	0.947	0.000
Loja	0.950	0.000	0.917	0.000	0.800	0.006	1.041	0.002	1.050	0.000	0.822	0.001
Babahoyo	0.200	0.435	1.077	0.000	1.355	0.001	1.449	0.002	1.719	0.000	2.039	0.000
Portoviejo	0.254	0.217	1.039	0.000	1.272	0.000	0.619	0.083	1.348	0.000	1.523	0.000
Quito	0.538	0.000	0.843	0.000	0.220	0.000	0.047	0.395	0.250	0.000	-0.100	0.029
Ambato	0.952	0.000	1.000	0.000	0.810	0.000	0.819	0.000	1.160	0.000	0.710	0.000
Nueva Loja	0.264	0.327	0.989	0.000	1.003	0.000	0.950	0.022	0.976	0.000	0.942	0.000
El Coca	1.959	0.000	0.863	0.000	1.596	0.058	2.418	0.002	1.277	0.000	1.736	0.002
Sto. Colorados	0.982	0.000	0.975	0.000	1.175	0.000	1.253	0.000	1.130	0.000	1.097	0.000

Tabla 2: Escalamiento de ciudades de Ecuador. CPV 2010. (Variable de tamaño: Número de viviendas)

Ciudad	Población		Viviendas sin acceso a agua		Viviendas sin acceso a alcantarillado		Hogares pobres		Hogares en pobreza extrema	
	p- val	α p- val	α	p- val	p- val	α	p- val	α	p- val	
Cuenca	0.135	0.000	0.693	0.000	1.080	0.000	0.392	0.000	0.61	0.000
Tulcán	0.131	0.000	0.273	0.007	1.016	0.000	0.452	0.000	0.792	0.000
Latacunga	0.066	0.011	0.487	0.000	0.777	0.000	0.273	0.000	0.413	0.000
Riobamba	0.145	0.000	0.605	0.000	0.755	0.000	0.31	0.000	0.438	0.000
Machala	0.025	0.120	0.586	0.000	0.855	0.000	0.239	0.000	0.514	0.000
Esmeraldas	0.057	0.002	0.454	0.000	0.705	0.000	0.267	0.000	0.447	0.000
Guayaquil	0.017	0.007	0.564	0.000	0.423	0.000	0.04	0.049	0.335	0.000
Ibarra	0.081	0.000	0.691	0.000	1.119	0.000	0.469	0.000	0.652	0.000
Loja	0.091	0.000	0.929	0.000	1.180	0.000	0.478	0.000	0.826	0.000
Babahoyo	0.000	0.998	0.876	0.000	0.781	0.000	0.308	0.000	0.637	0.000
Portoviejo	0.009	0.509	0.548	0.000	1.075	0.000	0.311	0.000	0.527	0.000
Quito	0.095	0.000	0.392	0.000	0.674	0.000	0.231	0.000	0.397	0.000
Ambato	0.152	0.000	0.549	0.000	0.920	0.000	0.323	0.000	0.457	0.000
Nueva Loja	0.146	0.000	0.488	0.000	1.011	0.000	0.34	0.000	0.409	0.000
El Coca	0.124	0.000	0.554	0.001	0.904	0.000	0.343	0.000	0.55	0.000
Sto. Colorados	0.128	0.000	0.643	0.000	0.881	0.000	0.359	0.000	0.517	0.000

Tabla 3: Escalamiento de ciudades de Ecuador. CPV 2010. (Variable de tamaño: Área)

Ciudad	Viviendas sin acceso a agua		Viviendas sin alcantarillado		Hogares pobres		Hogares en pobreza extrema	
	α	p- val	α	p- val	α	p- val	α	p- val
Cuenca	0.367	0.007	0.668	0.000	0.808	0.000	0.473	0.000
Tulcán	0.832	0.002	1.100	0.003	1.172	0.000	1.549	0.000
Latacunga	0.788	0.004	0.122	0.717	0.929	0.000	0.514	0.068
Riobamba	0.122	0.468	0.069	0.67	0.654	0.000	0.427	0.001
Machala	1.028	0.000	2.148	0.000	1.401	0.000	1.98	0.000
Esmeraldas	1.376	0.000	2.146	0.000	1.549	0.000	2.089	0.000
Guayaquil	0.275	0.000	2.357	0.000	1.550	0.000	1.639	0.000
Ibarra	0.986	0.000	1.283	0.000	1.387	0.000	1.133	0.000
Loja	1.016	0.000	1.371	0.000	1.305	0.000	1.38	0.000
Babahoyo	1.024	0.003	1.170	0.003	1.422	0.000	1.823	0.000
Portoviejo	1.285	0.000	1.072	0.000	1.567	0.000	1.903	0.000
Quito	0.394	0.000	0.411	0.000	0.921	0.000	0.436	0.000
Ambato	0.890	0.000	1.042	0.000	1.257	0.000	0.842	0.000
Nueva Loja	1.417	0.000	2.144	0.000	1.213	0.000	1.423	0.000
El Coca	-0.097	0.871	2.812	0.000	0.882	0.000	1.375	0.001
Sto. Colorados	1.587	0.000	1.775	0.000	1.372	0.000	1.628	0.000

Tabla 4: Escalamiento de ciudades de Ecuador. CPV 2010. (Variable de tamaño: Población)

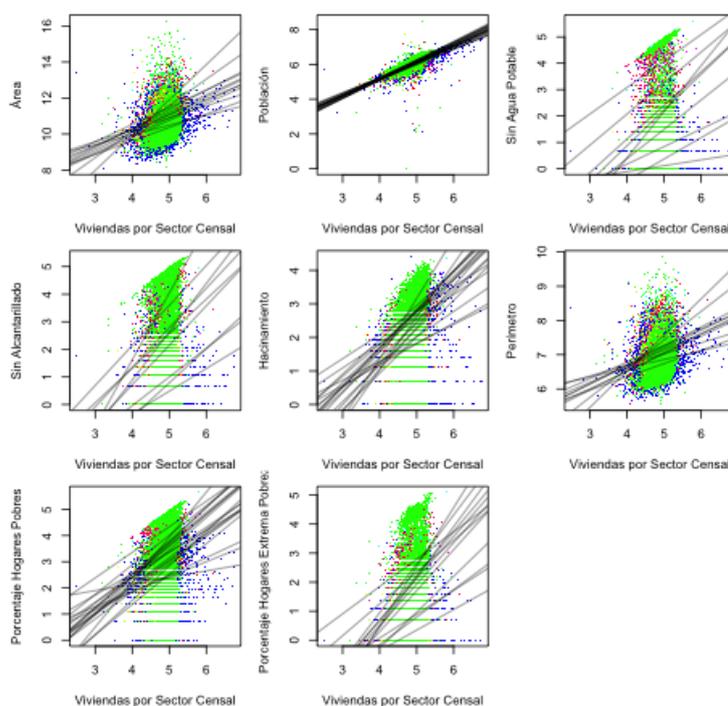


Figura 1: Estimaciones para las diversas capitales de provincias del Ecuador de relaciones alométricas de escalamiento (ecuación 9) respecto a número de viviendas. Los datos son del CPV 2010, por sector censal y están en logaritmos. En cada gráfico solo están incluidas las líneas regresión por ciudad cuyo coeficiente de la pendiente es significativo. Los coeficientes de las pendientes se pueden ver en la tabla 2. Se puede apreciar que muchas de estas pendientes son iguales o muy semejantes, estableciendo que en muchos casos existen las mismas relaciones alométricas.

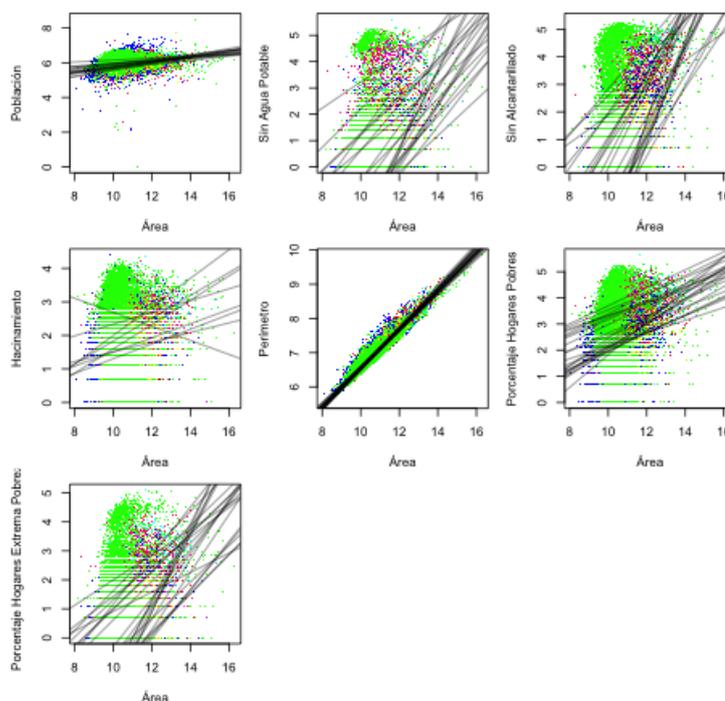


Figura 2: Estimaciones para las diversas capitales de provincias del Ecuador de relaciones alométricas de escalamiento (ecuación 9) respecto a área. Los datos son del CPV 2010, por sector censal y están en logaritmos. En cada gráfico solo están incluidas las líneas regresión por ciudad cuyo coeficiente de la pendiente es significativo. CPV 2010. Los coeficientes de las pendientes se pueden ver en la tabla 3. Se puede apreciar que muchas de estas pendientes son iguales o muy semejantes, estableciendo que en muchos casos existen las mismas relaciones alométricas.

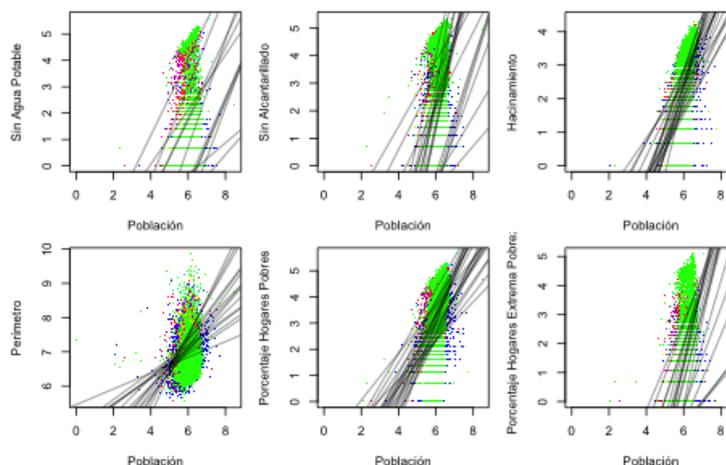


Figura 3: Estimaciones para las diversas capitales de provincias del Ecuador de relaciones alométricas de escalamiento (ecuación 9) respecto a área. Los datos son del CPV 2010, por sector censal y están en logaritmos. En cada gráfico solo están incluidas las líneas regresión por ciudad cuyo coeficiente de la pendiente es significativo. Los coeficientes de las pendientes se pueden ver en la tabla 4. Se puede apreciar que muchas de estas pendientes son iguales o muy semejantes, estableciendo que en muchos casos existen las mismas relaciones alométricas.

Distribución del Ingreso Mensual en Quito-2013

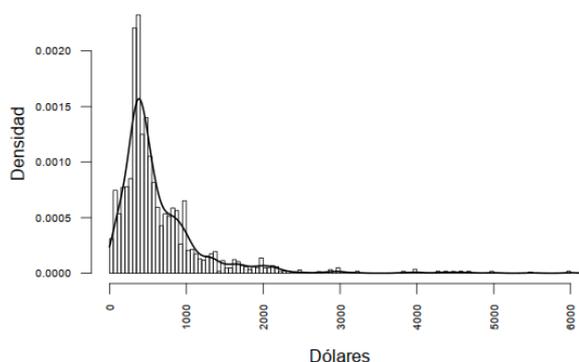


Figura 4: Histograma de ingresos en Quito en el 2013 y estimación no paramétrica de la densidad. Fuente ENEMDU

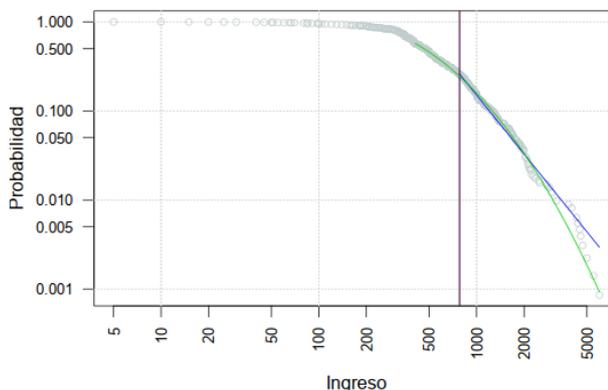


Figura 5: Función de probabilidad acumulada inversa para los ingresos mensuales en Quito-2013. La línea azul muestra el ajuste de la ley de potencia, la línea vertical es el $x_{min} = 780$; la línea verde es el ajuste de la ley lognormal, $x_{min} = 480$. Fuente ENEMDU 2013.

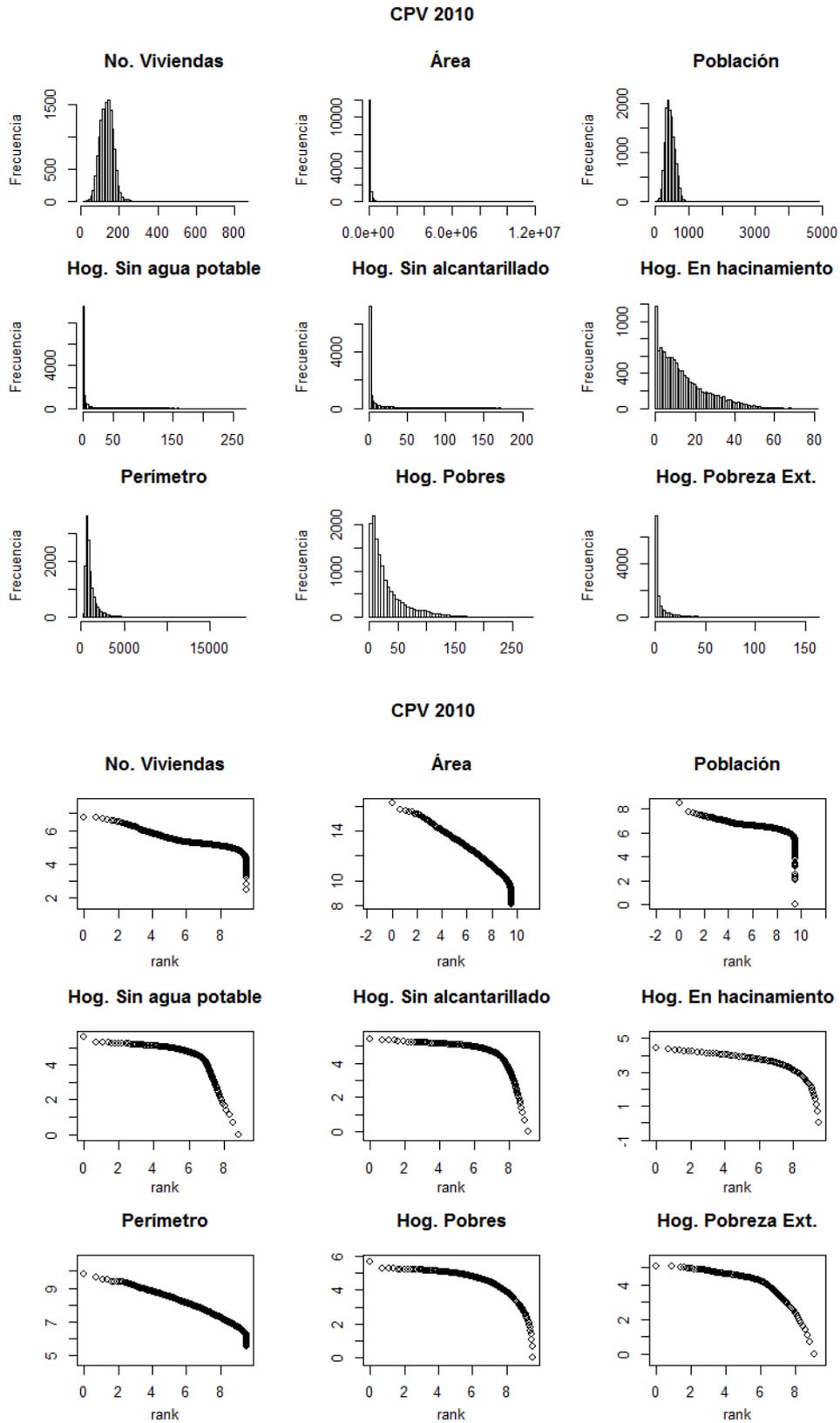
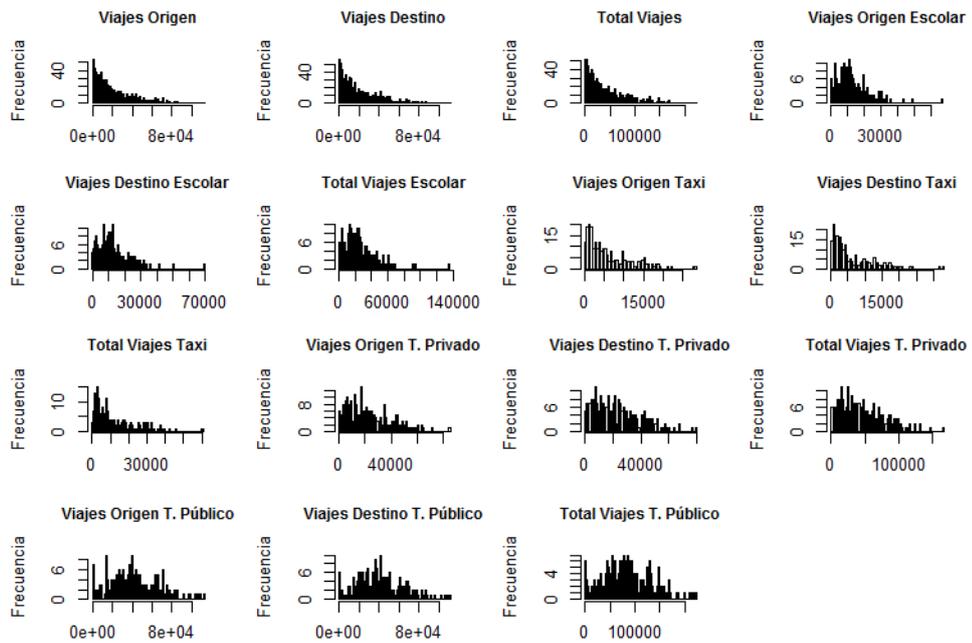


Figura 6: Histogramas y gráficos de Zipf para de las variables del Censo de Población y Vivienda 2010 usadas en el estudio. Los gráficos sugieren en general leyes de potencia.

Movilidad (2010 - 2011)



Movilidad (2010 - 2011)

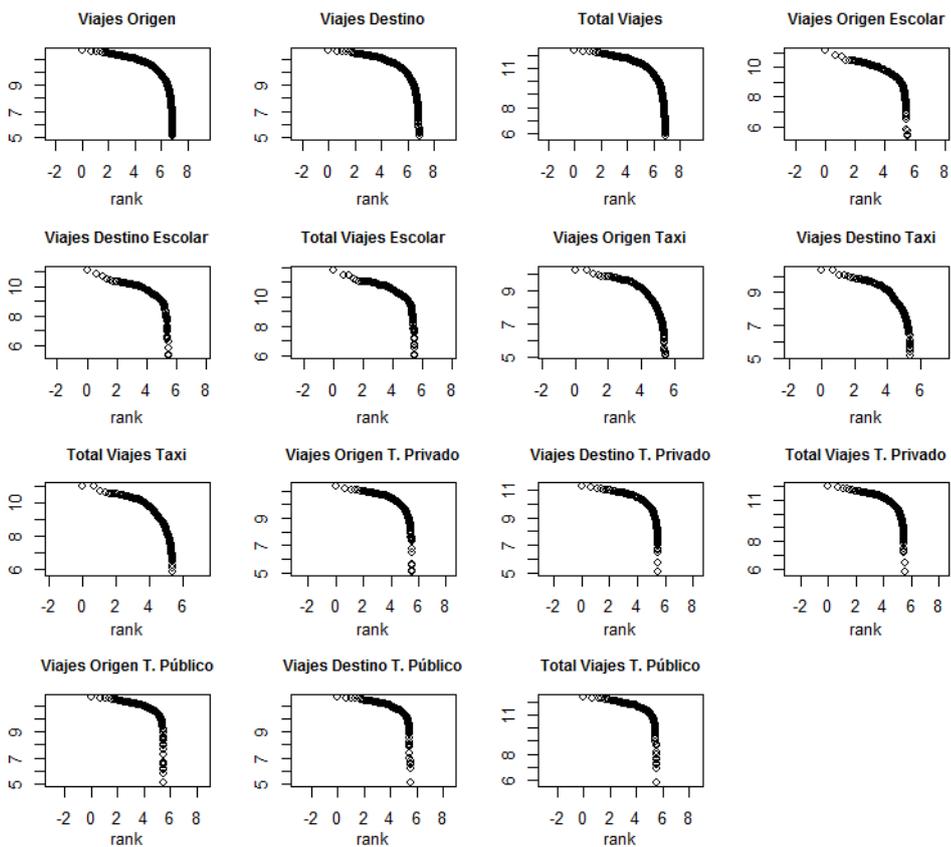


Figura 7: Histogramas y gráficos de Zipf para de las variables de movilidad en Quito usadas en el estudio. Los gráficos no sugieren en general leyes de potencia.

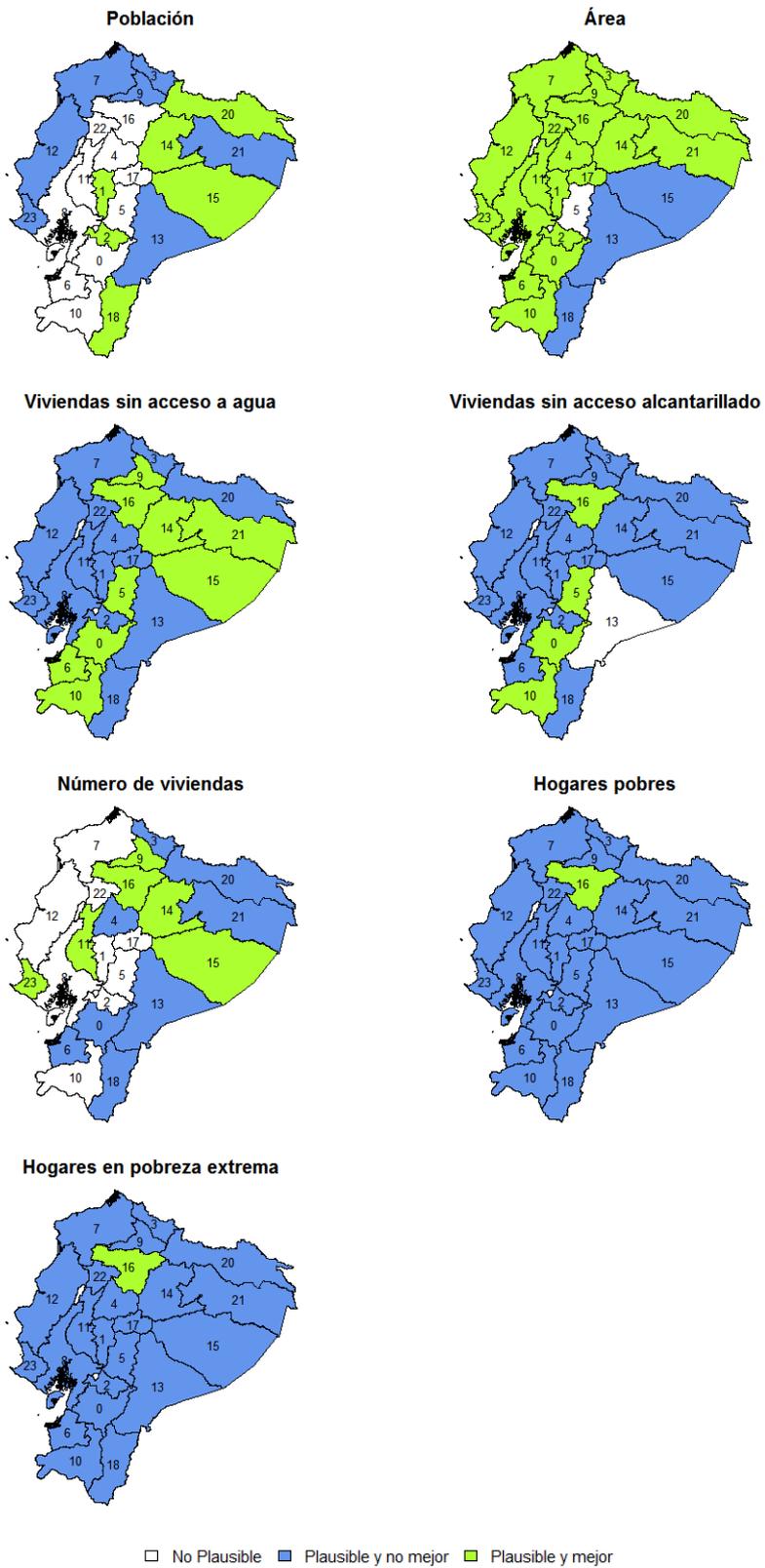


Figura 8: Estimaciones de Ley Potencia Cabeceras Cantonales

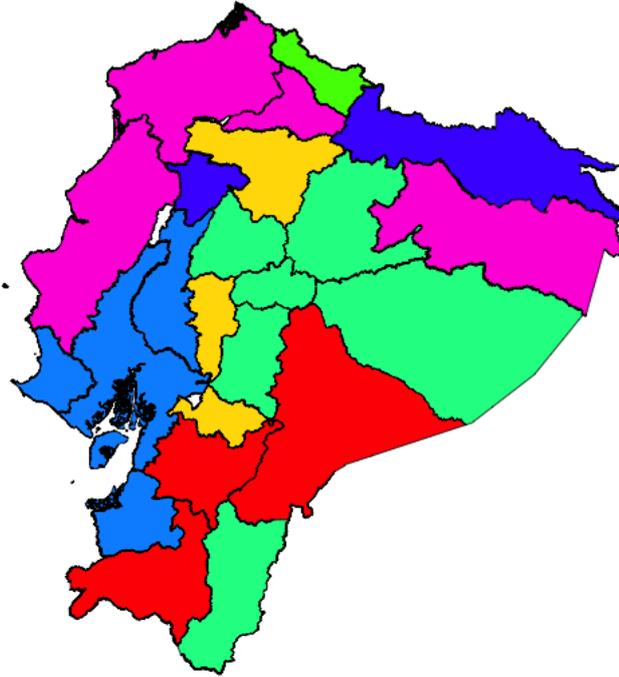
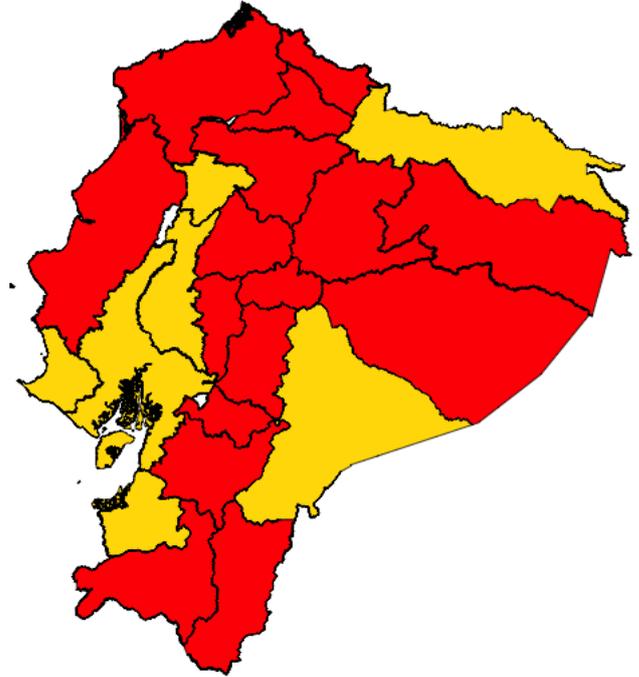
Agromeración óptima con siete conglomerados**Agromeración con dos conglomerados**

Figura 9: Aglomeraciones de ciudades de Ecuador, según sus valores α de ley de potencia. Se usa el método de mezcla de distribuciones normales para la estimación de los aglomerados. El panel izquierdo corresponde a la aglomeración óptima con siete conglomerados, panel derecho corresponde a una aglomeración con 2 conglomerados. Si se usa el BIC para establecer el número de conglomerados no hay formaciones de conglomerados entre 2 y 7 que sean comparables según este criterio.

Ciudad	Número de viviendas		Área		Población		Viviendas sin acceso a agua		Viviendas sin alcantarillado		Hacinamiento		Perímetro		Hogares Pobres		Hogares Extrema Pobreza	
	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval	α	pval
Cuenca	10.50	1.00	2.45	1.00	7.20	1.00	1.64	1.00	1.55	1.00	-	-	2.95	0.00	2.83	1.00	1.90	1.00
Guaranda	4.77	0.00	2.19	1.00	9.29	0.10	1.70	0.93	-	-	-	2.46	0.00	4.27	0.93	2.09	0.53	
Azogues	-	-	2.17	1.00	-	-	1.78	0.83	-	-	4.28	1.00	5.03	0.07	5.49	0.97	-	-
Tulcán	11.04	0.63	2.59	1.00	16.74	0.63	2.65	1.00	2.32	1.00	6.14	1.00	3.22	0.00	4.13	1.00	3.47	1.00
Latacunga	14.32	0.80	2.45	1.00	9.55	0.30	2.30	1.00	-	-	3.36	1.00	3.90	0.73	3.23	1.00	2.64	1.00
Riobamba	12.41	1.00	2.69	1.00	8.87	0.53	1.85	1.00	1.82	1.00	5.70	1.00	3.12	0.00	2.95	1.00	2.47	1.00
Machala	16.30	1.00	2.15	1.00	11.04	0.87	1.69	1.00	1.44	0.00	9.92	1.00	3.39	0.87	2.31	0.96	4.57	0.70
Esmeraldas	14.01	1.00	2.25	1.00	15.79	0.47	3.20	1.00	5.14	1.00	6.11	1.00	3.23	0.73	4.30	1.00	3.63	1.00
Guayaquil	18.07	1.00	1.96	1.00	14.08	1.00	1.50	1.00	1.29	0.00	9.62	1.00	2.94	1.00	2.56	1.00	1.69	1.00
Ibarra	9.07	0.93	2.19	1.00	10.43	0.46	1.74	1.00	3.24	1.00	7.11	1.00	3.53	0.50	3.57	1.00	1.88	1.00
Loja	10.10	1.00	1.96	1.00	8.62	0.80	1.52	0.97	1.45	0.97	8.12	1.00	2.27	0.00	6.43	1.00	4.25	0.97
Babahoyo	22.65	0.33	2.10	1.00	-	-	3.44	1.00	1.34	0.00	9.39	1.00	3.25	0.10	2.17	0.00	8.65	1.00
Portoviejo	15.48	1.00	2.11	1.00	13.23	0.23	1.62	0.83	1.34	0.00	6.82	1.00	2.70	0.00	2.56	0.53	6.32	0.97
Macas	-	-	1.78	1.00	5.33	0.40	1.93	1.00	1.43	0.00	6.95	1.00	2.66	0.77	-	-	2.74	0.97
Tena	-	-	2.59	1.00	6.65	0.40	2.16	1.00	-	-	6.03	1.00	-	-	6.19	1.00	-	-
Puyo	7.11	0.10	2.58	1.00	6.86	0.10	2.10	1.00	2.96	0.67	4.19	1.00	5.64	0.97	2.71	1.00	2.94	1.00
Quito	4.07	1.00	3.07	1.00	5.64	1.00	2.00	1.00	1.71	1.00	6.30	1.00	5.98	1.00	3.58	1.00	2.37	1.00
Ambato	11.07	1.00	2.71	1.00	10.36	0.20	2.45	1.00	3.52	1.00	4.36	1.00	3.76	0.77	3.01	1.00	2.56	1.00
Zamora	8.54	0.43	2.19	1.00	3.74	0.00	1.51	0.00	2.18	1.00	3.90	0.93	6.81	0.43	3.10	0.83	2.33	0.83
Nueva Loja	7.25	0.93	2.49	1.00	5.45	0.07	2.28	0.00	4.87	0.97	6.40	0.97	4.79	0.50	2.98	0.00	6.40	1.00
El Coca	19.69	0.97	2.51	1.00	11.10	0.63	1.70	0.97	1.34	0.00	7.31	1.00	3.33	0.47	2.83	1.00	2.20	1.00
Sto. Colorados	13.77	1.00	2.53	1.00	12.04	0.50	1.41	0.00	1.89	0.27	7.76	1.00	3.81	0.63	1.97	0.00	3.82	1.00
Sta. Elena	7.13	1.00	2.17	1.00	16.98	0.77	2.63	1.00	2.59	0.00	4.59	1.00	2.70	0.03	3.33	0.57	2.92	0.83
Promedio	11.7	-	2.3	-	11.1	-	2.0	-	-	-	6.6	-	-	-	3.6	-	3.6	-
C.V.	0.40	-	0.13	-	0.56	-	0.27	-	-	-	0.35	-	-	-	0.38	-	0.50	-

Tabla 51. Estimaciones de Ley Potencia. Para cada una de las cabeceras cantonales del Ecuador, sin tomar en cuenta Galápagos, se estimó una ley de potencia para nueve variables representativas. También se llevó a cabo una prueba de hipótesis con bootstrapping sobre si la distribución seguía una ley de potencia o no. Se reportan los valores α de la ley de potencia y el valor-p de la prueba de hipótesis. Se emarcó a los valores-p que rechazan la hipótesis nula de una ley de potencia. Cuando la cantidad de datos en la cola fue menor a 21, no se reportó la estimación.

Variables	x_{min}	Ley Potencia		Log-normal		Exponencial		Poisson		
		α	pval-KS	% cola	pval-RLV	estad	pval-RLV	estad	pval-RLV	estad
Número de delitos contra el patrimonio año 2010	21	2.19	0.33	0.249	0.096	-1.667	0.181	1.339	0.002	3.045
Número de delitos contra el patrimonio año 2011	20	2.06	0.00	0.321	0.069	-1.816	0.086	1.717	0.006	2.727
Número de delitos contra el patrimonio año 2012	32	2.09	0.00	0.288	0.099	-1.648	0.059	1.890	0.004	2.849
Número de delitos contra el patrimonio año 2013	26	2.06	0.00	0.283	0.048	-1.981	0.109	1.601	0.004	2.890
Viajes por zona de origen	39831	4.12	1.00	0.177	0.000	40.853	0.000	21.568	0.000	7.710
Viajes por zona de destino	40874	4.18	1.00	0.164	0.000	65.474	0.000	25.343	0.000	8.119
Total viajes por zona	84254	4.30	1.00	0.154	0.000	-144.680	0.000	-35.273	0.000	7.498
Viajes en t. escolar o empresa por zona de destino	9355	2.85	0.00	0.598	0.013	-2.474	0.081	1.743	0.000	5.130
Viajes en t. escolar o empresa por zona de origen	9331	2.87	0.00	0.602	0.021	-2.306	0.059	1.887	0.000	4.910
Total viajes en t. escolar o empresa por zona	21183	3.04	0.93	0.516	0.045	-2.002	0.012	2.508	0.000	4.513
Viajes en taxi por zona de origen	3192	2.13	0.00	0.596	0.001	-3.457	0.001	-3.372	0.000	8.905
Viajes en taxi por zona de destino	13816	5.00	1.00	0.124	0.000	-169.862	0.000	-18.050	0.013	2.488
Total viajes en taxi por zona	26202	5.47	0.93	0.142	0.000	-384.344	0.000	-64.732	0.011	2.531
Viajes en transporte privado por zona de origen	40674	5.99	1.00	0.166	0.000	-653.541	0.000	-143.618	0.002	3.039
Viajes en transporte privado por zona de destino	39043	6.46	1.00	0.174	0.000	-484.720	0.000	-159.676	0.000	3.707
Total viajes en transporte privado por zona	73922	5.10	1.00	0.202	0.000	-314.747	0.000	-111.117	0.000	3.819
Viajes en transporte público por zona de origen	37872	3.59	0.00	0.534	0.008	-2.636	0.000	4.953	0.000	8.151
Viajes en transporte público por zona de destino	38023	3.60	0.80	0.518	0.008	-2.636	0.000	4.953	0.000	8.151
Total viajes en transporte público por zona	72684	3.55	1.00	0.569	0.006	-2.736	0.000	5.013	0.000	8.212

Tabla 6: Otras Estimaciones de Ley Potencia: Quito

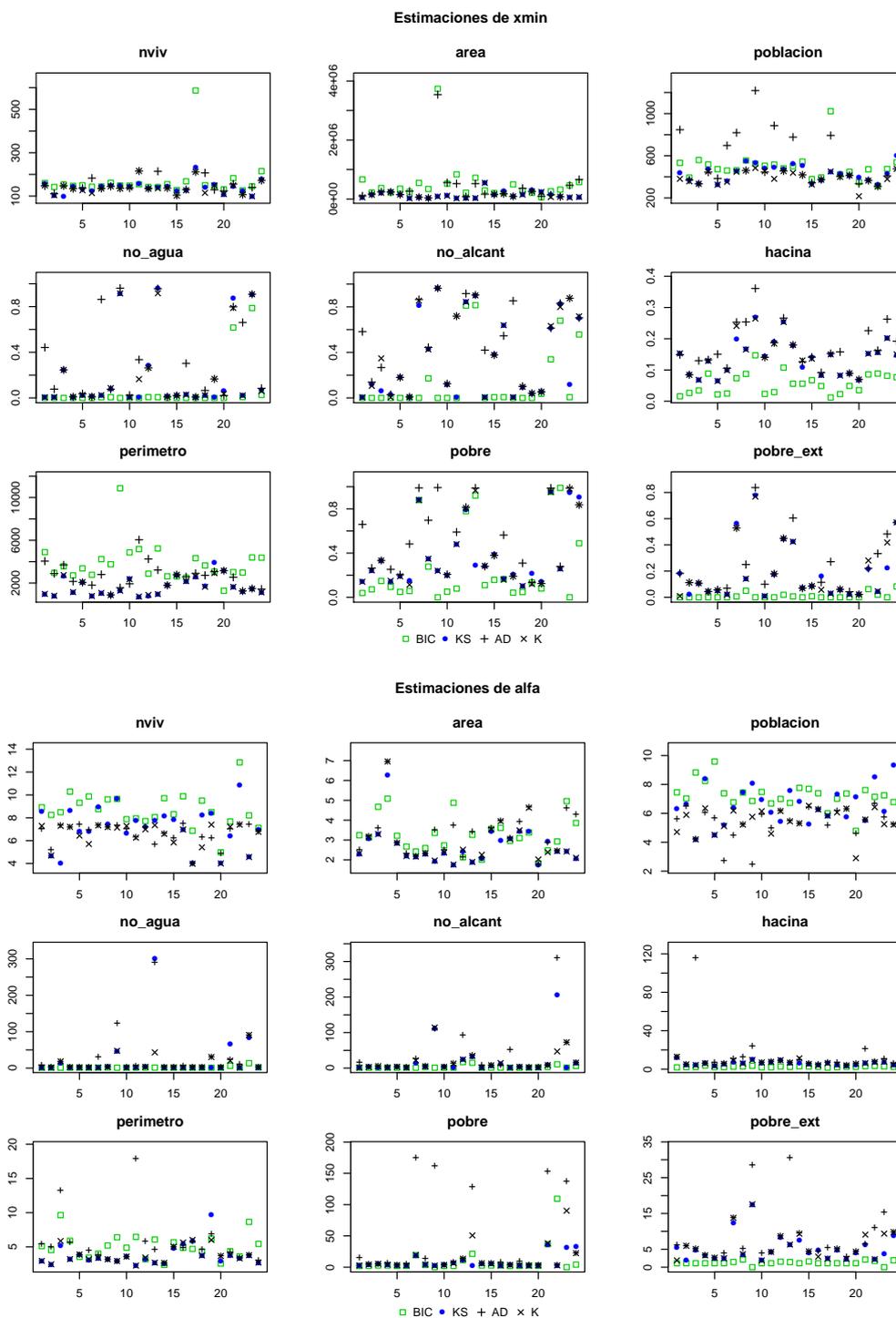
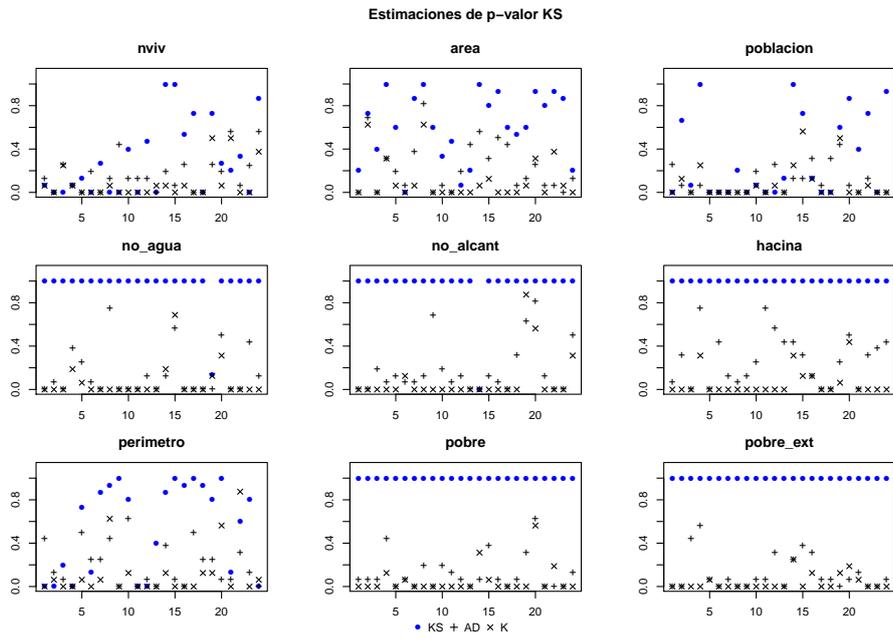
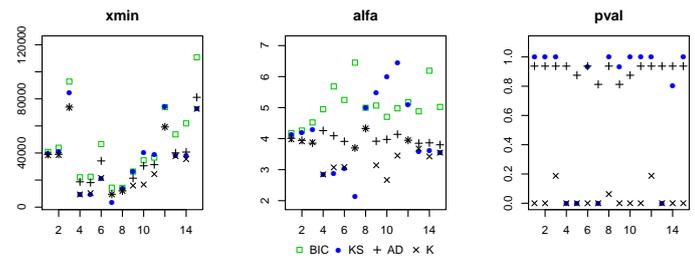


Figura 10: Contraste de métodos de estimación (Cabeceras cantonales)



Contraste de estimaciones de movilidad



Contraste de estimaciones de robos

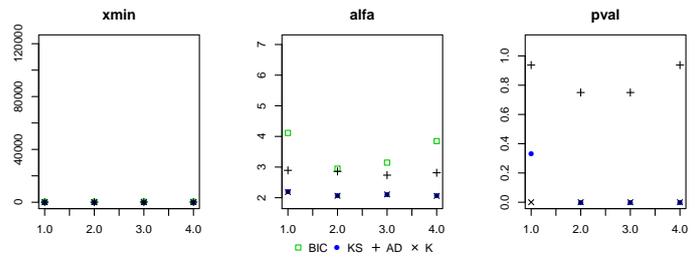


Figura 11: Contraste de métodos de estimación (Quito)