

Calculation of radar signals delay to second order in the frame of the General Relativity Theory

Cálculo del retardo de las señales de radar a segundo orden en el marco de la Teoría General de la Relatividad

Joaquín Grefa^{1*} y Carlos A. Marín¹

¹Universidad San Francisco de Quito - Colegio de Ciencias e Ingeniería.
Diego de Robles S/N, Cumbayá.

*Autor principal/Corresponding author, e-mail: valerio.grefa@estud.usfq.edu.ec

Editado por/Edited by: Cesar Zambrano, Ph.D.

Recibido/Received: 03/01/2014. Aceptado/Accepted: 24/03/2014.

Publicado en línea/Published on Web: 13/06/2014. Impreso/Printed: 13/06/2014.

Abstract

From the Schwarzschild metric, the light delay due to a gravitational field is calculated to second order approximation in the gravitational potential. We analyze the contribution of the second order terms for strong gravitational fields as the generated for black holes from stellar collapse and supermassive blackholes. Additionally, the angular dependence of the delay for a distant source as a pulsar is reviewed.

Keywords. general relativity, light deflection, Einstein, black hole, pulsar.

Resumen

Partiendo de la métrica de Schwarzschild se calcula el retardo de las señales de radar debido a un campo gravitacional en aproximación de segundo orden en el potencial gravitacional. La contribución de los términos de segundo orden es analizada en el caso de campos gravitacionales fuertes como los generados por agujeros negros resultado del colapso de estrellas y agujeros negros supermasivos. Adicionalmente, la dependencia angular del retardo para una fuente distante como un pulsar es revisada.

Palabras Clave. relatividad general, desviación de la luz, Einstein, agujero negro, pulsar.

Introducción

Uno de los experimentos que bien podría incluirse dentro del grupo de pruebas clásicas de la Teoría General de la Relatividad (TGR) es el retardo de las señales de radar. Este retardo está íntimamente relacionado con el experimento de desviación de los rayos de luz debido a un campo gravitacional y fue descubierto en 1964 por Irwin Shapiro [1] quien lo postuló como la cuarta prueba a la que debería ser sometida la TGR. Este fenómeno fue bautizado y es conocido como “Shapiro Delay” o “Retardo de Shapiro”.

La prueba de dicho retardo llegó de la mano con el desarrollo de la tecnología de los radares que en ese tiempo se utilizaban para detectar misiles soviéticos. Como Shapiro mismo lo reconoce, fue el avance en la tecnología lo que permitió que las señales de radar enviadas a planetas como Marte, Mercurio y Venus fueran detectadas a su regreso a la Tierra (una ventaja que Einstein no poseía en su época) [1–5].

De acuerdo con la TGR, una señal de radar enviada a través del sistema solar hacia un planeta o satélite sufre un retraso debido al campo gravitacional del Sol. En conjunción superior, es decir, cuando el planeta y la Tierra se encuentran en lados opuestos con el Sol en su centro, el retraso que sufre una señal de radar que pasa muy cerca del limbo del Sol en su viaje de ida y vuelta es [6, 7]:

$$\Delta T = \frac{4GM_{\odot}}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4x_E x_P}{R_{\odot}^2} \right) + 1 \right] \quad (1)$$

donde M_{\odot} es la masa del Sol, $x_E = 1.5 \times 10^{11} m$ es la distancia de la Tierra al Sol, x_P es la distancia del Sol al planeta, y R_{\odot} es el radio del Sol. Tomando como ejemplo particular el planeta Mercurio con $x_P = 5.79 \times 10^{10} m$, la ecuación (1) predice un retardo de $\Delta T = 239.84 \mu s$.

Como se dijo anteriormente, la ecuación (1) es solo válida en conjunción superior, es decir, solo para una po-



sición específica. Sin embargo, es posible obtener una expresión general que considera las diferentes distancias entre el planeta y la fuente (la Tierra) tal como lo hace Will [5]:

$$\Delta T = \frac{4GM_{\odot}}{c^3} \ln \left[\frac{(r_E + \vec{x}_E \cdot \hat{n})(r_P - \vec{x}_P \cdot \hat{n})}{b^2} \right] \quad (2)$$

donde \vec{x}_P, \vec{x}_E son los vectores de posición del planeta y la Tierra con respecto al Sol, respectivamente. r_P, r_E son las distancias del Sol al planeta y a la Tierra, \hat{n} es un vector unitario en la dirección del rayo de luz de regreso a la Tierra, y b es la distancia de máxima aproximación del rayo de luz en relación al Sol. Haciendo las aproximaciones necesarias, es decir, $b \approx R_{\odot}, \vec{x}_E \cdot \hat{n} \approx r_E,$ y $\vec{x}_P \cdot \hat{n} \approx -r_P$ obtenemos la ecuación (1).

En décadas posteriores a la postulación del experimento se realizaron varias medidas de alta precisión enviando señales de radar hacia diferentes objetivos. Como se mencionó anteriormente, se enviaron señales a Venus y Mercurio usando el radio-telescopio de Arecibo en Puerto Rico con el fin de detectar sus ecos. También se usaron satélites artificiales, como los Mariner 6, 7 y 9, Voyager 2, y las sondas Vikingo que fueron enviadas hacia Marte. Todas estas medidas confirmaron la predicción de la TGR dentro del 0.1 % [3, 4, 8, 9]. Sin embargo, el margen de error disminuyó enormemente a partir de los datos obtenidos por la nave Cassini en el año 2003 en su viaje cerca de Saturno, en el cual se pudo reportar que la predicción de la TGR concordaba con el valor medido dentro del 0.0012 % [10].

1 Cálculo del Retardo de las señales de radar a segundo orden

Como se ha visto, los resultados de la ecuación (1) son más que satisfactorios para el caso del sistema solar que es un régimen de campo gravitacional débil. Las relaciones (1) y (2) se obtienen usando una aproximación de primer orden en la métrica de Schwarzschild. En esta sección se procede a calcular el retardo de las señales de radar pero con términos de hasta segundo orden para conjunción superior. El cuadrado del elemento de arco en la métrica de Schwarzschild es [6, 7]:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (3)$$

donde r, θ y φ son las coordenadas esféricas de un punto en el espacio y t es el tiempo coordenado medido por un observador remoto en reposo en dicho punto. $\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, donde M representa la masa que genera el campo gravitacional y G es la constante de gravitación universal. Para un rayo de luz, $ds = 0$. Tomando, $\theta = \pi/2$ (plano ecuatorial), la ecuación (3) se puede escribir

$$\gamma c^2 - \gamma^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

utilizando la regla de la cadena

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right) \quad (5)$$

donde τ es el tiempo propio medido por un observador inmerso en el campo gravitacional.

Partiendo de la ecuación de la geodésica (ver referencia [7]):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) = 0$$

donde μ, ρ y σ pueden tomar los valores 0, 1, 2 y 3 ($x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta$ y $x^3 = \phi$), se puede demostrar fácilmente (haciendo en dicha ecuación $\mu = 0$ y $\mu = 3$) que

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma c^2}{E'}$$

y

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}$$

donde E' es una constante que tiene dimensiones de energía por unidad de masa y J es el momento angular por unidad de masa.

Reemplazando las dos últimas expresiones en (5) obtenemos :

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{J\gamma c^2}{E'} \quad (6)$$

Definiendo $\sqrt{w} = \frac{c^2 J}{E'}$ (w es una constante porque J y E' son constantes), tenemos $\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{\gamma^2 w}{r^4}$, de manera que reemplazando en (4) se puede escribir

$$\gamma c^2 - \gamma^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \gamma^2 \frac{w}{r^2} = 0$$

Evaluando la última relación para $r = b$, siendo b la distancia de máxima aproximación del rayo de luz al Sol, se anula el segundo término. Entonces obtenemos

$$w = \frac{b^2 c^2}{\gamma_b} \quad (7)$$

En la expresión anterior $\gamma_b = \gamma|_{r=b} = 1 - \frac{2GM}{bc^2}$, de manera que:

$$\gamma^2 c^2 - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\gamma^3 b^2 c^2}{r^2 \gamma_b} = 0$$

Despejando el segundo término y sacando la raíz cuadrada del mismo

$$\frac{dr}{dt} = \gamma c \left(1 - \frac{b^2 \gamma}{r^2 \gamma_b}\right)^{1/2}$$

De la expresión anterior tenemos que

$$dt = \frac{dr}{c \gamma \left(1 - \frac{b^2 \gamma}{r^2 \gamma_b}\right)^{1/2}} \quad (8)$$

Utilizando la serie $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ escribimos γ y γ_b^{-1} conservando términos de hasta segundo orden

$$\gamma^{-1} \approx 1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 + \dots$$

$$\gamma_b^{-1} \approx 1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 + \dots$$

con lo cual

$$dt = \frac{dr \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r}{c \left[r^2 - b^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2\right)\right]^{1/2}}$$

ahora

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2\right) \approx \\ & 1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 - \frac{2GM}{rc^2} - \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{rb} \\ & \approx 1 + \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \end{aligned}$$

con esta aproximación, el diferencial dt se puede escribir

$$dt = \frac{\left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2} \left\{1 + \frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[-\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r}\right]\right\}^{1/2}}$$

Utilizando la serie $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$ y conservando de nuevo sólo términos de hasta segundo orden se obtiene

$$\begin{aligned} & \left\{1 + \frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[-\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r}\right]\right\}^{-1/2} \\ & \approx 1 - \frac{GM}{(r+b)c^2} \left[-\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r}\right] \\ & + \frac{3}{8} \left\{\frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[-\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r}\right]\right\}^2 - \dots \end{aligned}$$

que se reduce a

$$\begin{aligned} & \approx 1 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} \\ & + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

reemplazando en la expresión del diferencial del tiempo y conservando términos hasta segundo orden en $\frac{GM}{rc^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} dt \approx & \frac{r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right. \\ & + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2 \left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} \\ & + 2 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) \quad (9) \end{aligned}$$

Debido a que se considera el tiempo que se demora la señal en ir desde la fuente al planeta o satélite y regresar, se debe sumar dos veces la misma integral, por lo que

$$\begin{aligned} t = 2 \int_b^{r^E} & \frac{r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right. \\ & + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2 \left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} \\ & + 2 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + 2 \int_b^{r^P} & \frac{r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right. \\ & + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2 \left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} \\ & + 2 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right) \quad (10) \end{aligned}$$

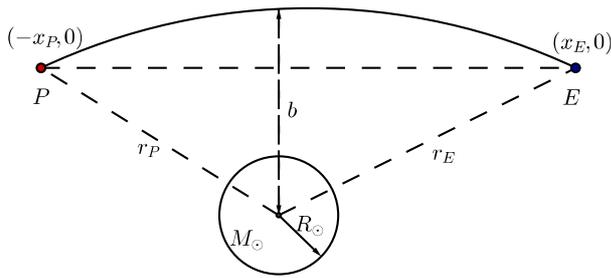


Figura 1: Geometría para el cálculo del retardo de las señales de radar a segundo orden para rayos de luz que se envían desde la Tierra E (en la posición $(x_E, 0)$) hacia un planeta o satélite P (en la posición $(-x_P, 0)$) en conjunción superior. M_\odot es la masa del Sol, R_\odot es el radio del Sol, r_E y r_P representan las distancias desde el Sol a la Tierra y desde el Sol al planeta, respectivamente.

Donde r_E y r_P son las distancias desde el Sol a la Tierra y al planeta (o satélite), respectivamente. Estas variables se pueden visualizar en la figura 1.

Las integrales que se presentan en (10) y sus respectivas antiderivadas son:

$$\int \frac{r dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} = (r^2 - b^2)^{1/2} + C$$

$$\int \frac{dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} = \ln \left(r + (r^2 - b^2)^{1/2} \right) + C$$

$$\int \frac{dr}{r(r^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \arctan \left[\frac{(x^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] + C$$

$$\int \frac{dr}{(r + b)(r^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \left(\frac{r - b}{r + b} \right)^{1/2} + C$$

Sin embargo, las siguientes integrales no poseen solución analítica

$$\int \frac{dr}{r(r + b)^i (r^2 - b^2)^{1/2}}$$

donde $i = 1, 2$.

Por otro lado, según la figura 1, el tiempo que la señal de radar tomará en realizar el viaje de ida y vuelta si no consideramos el campo gravitacional del Sol es:

$$t' = \frac{2x_E}{c} + \frac{2x_P}{c}$$

A partir de la figura 1, es evidente que

$$t' = \frac{2}{c} \left[(r_E^2 - b^2)^{1/2} + (r_P^2 - b^2)^{1/2} \right] \quad (11)$$

Usando las fórmulas (10) y (11), el retardo que experimentan las señales de radar es entonces $\Delta t = t - t'$. En otras palabras, es la diferencia entre el tiempo que se demora la señal en ir y regresar considerando el campo gravitacional del Sol (la geodésica correspondiente al espacio-tiempo curvo producido por el campo gravitacional del Sol) menos el tiempo que se demoraría despreciando la gravedad del mismo (una trayectoria recta correspondiente a un espacio-tiempo plano en ausencia de campos gravitacionales).

$$\begin{aligned} \Delta t = & \frac{2GM}{c^3} \left[\left(\frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \\ & + \frac{4GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_E + (r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b^2} \right) \\ & + \frac{4GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_P + (r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b^2} \right) \\ & + \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \left(\arctan \left[\frac{(r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right. \\ & \left. + \arctan \left[\frac{(r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right) \\ & + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left[\left(\frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \\ & + \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \left[\int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r + b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r + b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \\ & + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \left[\int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r + b)^2 (r^2 - b^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r + b)^2 (r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

Los primeros dos términos pertenecen a la aproximación de primer orden, es decir,

$$\begin{aligned} \Delta t_1 = & \frac{4GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_E + (r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b^2} \right) \\ & + \frac{4GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_P + (r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b^2} \right) \\ & + \frac{2GM}{c^3} \left[\left(\frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

Los términos correspondientes a la aproximación de segundo orden (sin tener en cuenta las cuatro últimas integrales) son:

$$\begin{aligned} \Delta t_2 = & \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \left(\arctan \left[\frac{(r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right. \\ & \left. + \arctan \left[\frac{(r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right) \\ & + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left[\left(\frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left(\frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, expresaremos los términos que contienen las integrales como la contribución final al cálculo del retardo de las señales de radar a segundo orden:

$$\begin{aligned} \Delta t_I = & \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \left[\int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \\ & + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \left[\int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Para saber cuál es la contribución de cada término al resultado final, tomaremos un ejemplo en particular. Para una señal enviada al planeta Mercurio, r_E es la distancia de la Tierra al Sol, r_P es la distancia del planeta Mercurio al Sol y en el caso en que el rayo de luz pase muy cerca del limbo del Sol tendríamos $b = R_\odot = 6.9551(4) \times 10^8$ [m] que es el radio del Sol [11]. Entonces se justifican las aproximaciones $r_E \approx x_E = 1.5 \times 10^{11}$ [m], $r_P \approx x_P = 5.79 \times 10^{10}$ [m] y $r_E, r_P \gg b$.

Como se mencionó anteriormente, el retardo de las señales de radar es la suma de tres términos:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_I \quad (16)$$

donde Δt_1 corresponde a la aproximación a primer orden, Δt_2 corresponde a los términos de la aproximación a segundo orden sin incluir las integrales y Δt_I corresponde a los términos con las integrales que se calcularon numéricamente usando Mathematica. Entonces, para nuestro caso en particular:

$$\Delta t_1 \approx \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4x_E x_P}{R_\odot^2} \right) + 1 \right] \quad (17)$$

de manera que se recupera la ecuación (1) correspondiente al retardo de la señal de radar a primer orden.

En el caso particular del planeta Mercurio se obtiene

$$\Delta t_1 = 239.84342 \mu sec$$

Los términos de Δt_2 se pueden aproximar como:

$$\begin{aligned} \Delta t_2 = & \frac{8(GM)^2}{c^5 R_\odot} \left[\arctan \left(\frac{x_E}{R_\odot} \right) \right. \\ & \left. + \arctan \left(\frac{x_P}{R_\odot} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

e introduciendo los valores numéricos obtenemos

$$\Delta t_2 = 3.443928 \times 10^{-10} sec$$

Por lo tanto, el retardo debido a las dos primeras contribuciones es

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 239.843769 \mu sec$$

Las integrales de Δt_I fueron calculadas usando Mathematica y sus valores son

$$\int_{R_\odot}^{x_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} = 1.17994 \times 10^{-18}$$

$$\int_{R_\odot}^{x_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} = 1.17982 \times 10^{-18}$$

$$\int_b^{x_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} = 7.05794 \times 10^{-28}$$

$$\int_b^{x_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} = 7.05793 \times 10^{-28}$$

con lo cual,

$$\Delta t_I = 6.264739232 \times 10^{-11} sec$$

de manera que el retardo de una señal de radar enviada al planeta Mercurio desde la Tierra es,

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_I = 239.843832 \mu sec$$

La contribución de Δt_I es menor que la de Δt_2 , y a medida que aumenta la distancia entre la fuente o el planeta y el Sol, $\Delta t_I \rightarrow 0$. Por lo tanto, el retardo de la señal de radar con las aproximaciones mencionadas para un rayo de luz que pasa muy cerca del limbo del sol se puede expresar como

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4x_E x_P}{R_\odot^2} \right) + 1 \right] + \frac{8(GM)^2}{c^5 R_\odot} \left[\arctan \left(\frac{x_E}{R_\odot} \right) + \arctan \left(\frac{x_P}{R_\odot} \right) + 1 \right] \quad (19)$$

2 Retardo de las Señales de Radar Producido por Agujeros Negros

Anteriormente se comprobó que en el caso del sistema solar, los últimos cuatro términos en la ecuación (12) (los que contienen las integrales), son despreciables. Usando los datos de las distancias de la Tierra y Mercurio, y el radio del Sol se obtuvo que $\Delta t = 239.84 \mu s$ con lo cual se establece que el cálculo de retraso a primer orden es muy preciso para regímenes de campo débil. No obstante, es interesante analizar los casos en los que se presentan campos gravitacionales fuertes como los producidos por agujeros negros resultado del colapso de estrellas o agujeros negros supermasivos.

Cuando una estrella agota su combustible nuclear y ya no le es posible contener la presión ejercida por la fuerza gravitacional se convertirá en un agujero negro siempre y cuando la masa del núcleo que colapsa sea mayor a 3.2 veces la masa del sol, es decir, cuando $M > 3.2M_\odot$. Al contorno que rodea a un agujero negro se le conoce como horizonte de sucesos. Un rayo de luz proveniente del interior de la estrella en colapso no puede atravesar el horizonte de sucesos porque la velocidad de escape llega a ser igual o mayor que la velocidad de la luz. Al radio del horizonte de sucesos se le conoce como radio de Schwarzschild y está dado por la expresión $r_s = 2GM/c^2$. La posible existencia de agujeros negros fue predicha usando las ecuaciones de Campo de Einstein por Karl Schwarzschild en el año 1916, aunque de acuerdo a lo que se conoce, la primera persona en sugerir la existencia de un objeto de estas características fue John Michell en 1783 [6].

En la Tabla 1 se analiza el valor del retardo de las señales de radar para estrellas y agujeros negros con diversas masas (incluyendo agujeros negros supermasivos), asumiendo que los planetas entre los cuales se envía la señal de radar se encuentran a igual distancia de la estrella o agujero negro. Para este análisis tomaremos como referencia la distancia a la que se encuentra el planeta Saturno en relación al Sol ($x_E = x_P = 1,433,000,000$ km). A estas distancias las integrales en (12) se vuelven totalmente despreciables por lo tanto la contribución de

Δt_I es nula. También se considera que la distancia más próxima del rayo de luz al centro de la estrella o agujero negro es el radio de Schwarzschild, es decir, $b = r_s$.

Como se observa en la Tabla 1, a medida que aumenta la masa de la estrella o del agujero negro que genera el campo gravitacional, la contribución de los términos de segundo orden se hace cada vez más importante dejando de ser despreciable.

3 Cálculo del retardo de una señal proveniente de una fuente distante

El cálculo del retardo de las señales de radar enviadas o recibidas hacia o desde un objeto dentro del sistema solar está expresado por la ecuación (2). Sin embargo, para objetos o cuerpos celestes que se encuentran fuera o muy distantes del sistema solar (estrellas, pulsares, fuentes de radiación, etc), y en vista de la necesidad de analizar las señales que provienen de ellos, también resulta necesario calcular el retardo sufrido por los fotones provenientes de dichas fuentes. Tomaremos el caso de la ondas electromagnéticas que un pulsar emite periódicamente.

Usando la aproximación de campo lineal para una distribución esférica de masa en reposo (como es el caso del sistema solar), el cuadrado del elemento de arco se escribe [12]:

$$(ds)^2 = \left[1 - \frac{2GM_\odot}{rc^2} \right] c^2 (dt)^2 - \left[1 + \frac{2GM_\odot}{rc^2} \right] |d\vec{r}|^2, \quad (20)$$

y debido a que el intervalo invariante para los fotones es $ds = 0$ tenemos

$$cdt = \pm \left[1 + \frac{2GM_\odot}{rc^2} \right] |d\vec{r}| \quad (21)$$

Si \vec{r}_p representa la posición fija del pulsar, \vec{r}_{obs} la posición del observador cuando llega la señal al tiempo t_{obs} , y t_e es el tiempo de emisión de la señal desde el pulsar, entonces la diferencia entre el tiempo t_{obs} medido por el observador y el tiempo de emisión desde el pulsar t_e es [13]:

$$c(t_{obs} - t_e) = \int_{\vec{r}_{obs}}^{\vec{r}_p} \left[1 + \frac{2GM_\odot}{rc^2} \right] |d\vec{r}| = |\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| + \frac{2GM_\odot}{c^2} \int_{\vec{r}_{obs}}^{\vec{r}_p} \frac{|d\vec{r}|}{r} \quad (22)$$

Masa Estrella (M_{\odot})	Primer Orden (s)	Segundo Orden (s)	Retardo total (s)
10	0.0074436963	$8.1597760348 \times 10^{-4}$	0.0082596739
100	0.0653638455	0.008159775	0.0735236205
1,000	0.5629072417	0.0815976397	0.6445048814
10,000	4.721756986	0.8159654346	5.5377224207
100,000	38.1440866628	8.1585580857	46.3026447484
1'000,000	290.67314551	81.475991985	372.14913749
10'000,000	1995.7644852	803.83690371	2799.6013889
100'000,000	10510.893483	6970.1163737	17481.009857
1,000'000,000	$r_s > r_p$	$r_s > r_p$	$r_s > r_p$

Tabla 1: Retardo de las señales de radar para estrellas y agujeros negros con diferentes masas estelares

Por otro lado,

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| = |(\vec{r}_p - \vec{r}_s) + (\vec{r}_s - \vec{r}_{obs})| \quad (23)$$

donde \vec{r}_s es la posición del centro de masa del sistema solar. Si definimos un vector unitario \hat{n} que apunte desde el centro de masa del sistema solar al pulsar, $\hat{n} = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|}$, y teniendo en cuenta que $|\vec{r}_p - \vec{r}_s| \gg |\vec{r}_s - \vec{r}_{obs}|$ y que $\vec{r}_s - \vec{r}_{obs} \approx -r_{obs} \vec{\hat{n}}$, es posible escribir la relación (23) como:

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| \approx |\vec{r}_p - \vec{r}_s| + (\vec{r}_s - \vec{r}_{obs}) \cdot \hat{n} \quad (24)$$

y por lo tanto, la ecuación (22) se puede expresar como:

$$t_{obs} = \left(t_e + \frac{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|}{c} \right) - \frac{r_{obs} \cdot \hat{n}}{c} + \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \int_{r_{obs}}^{r_p} \frac{|\vec{dr}|}{r} \quad (25)$$

El primer término corresponde al tiempo que tarda la señal en llegar al centro de masa del sistema solar. Se puede interpretar el mencionado término como si fuera el tiempo en que llegaría la señal si se despreciaran los efectos gravitacionales debido al sistema solar. Al segundo término se le denomina Retardo de Roemer (Roemer delay) y se debe al movimiento del observador. El tercer término es el que realmente nos interesa ya que corresponde al retardo de la señal debido al campo gravitacional de sol.

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \int_{r_{obs}}^{r_p} \frac{|\vec{dr}|}{r} \quad (26)$$

Consideremos una señal emitida por el pulsar que llega a la Tierra cuando el ángulo formado por el pulsar, el Sol y la Tierra tiene un valor θ . Sea P un punto cualquiera sobre la línea recta que une la Tierra con el pulsar, entonces podemos escribir

$$r^2 = (r_e + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \quad (27)$$

donde r es la distancia del Sol al punto P , r_e es la distancia entre el sol y la Tierra, ρ es la distancia de la Tierra a P (ver figura 2). Con la sustitución $u = \frac{\rho}{r_e}$ la ecuación anterior es:

$$r = r_e (u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2} \quad (28)$$

Por lo tanto, (26) es:

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \int_0^d \frac{d\rho}{r}$$

donde d es la distancia de la Tierra al pulsar. Con estas sustituciones tenemos

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \int_0^v \frac{du}{(u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2}} \quad (29)$$

donde $v = d/r_e$. Para calcular la integral tomamos $v = \frac{d}{r_e} \rightarrow \infty$ de tal forma que

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \ln \left(\frac{2d}{r_e} \right) - \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \ln(1 + \cos \theta) \quad (30)$$

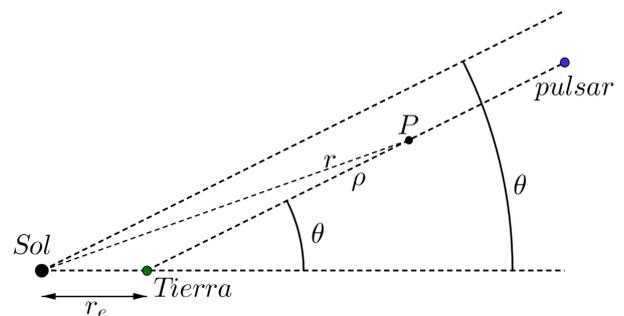


Figura 2: Geometría para el cálculo del retardo de una señal proveniente de una fuente distante, en este caso un pulsar. r_e es la distancia entre la Tierra y el Sol, P es un punto de referencia entre la línea que une la Tierra con el pulsar, ρ es la distancia del punto P a la Tierra, y r representa la distancia del punto P al sol.

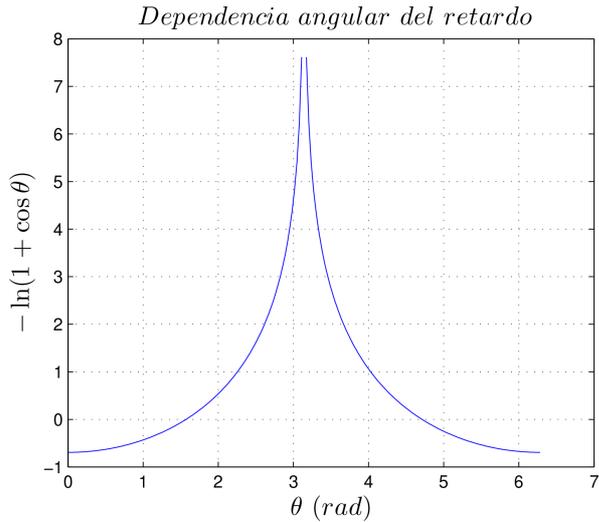


Figura 3: Dependencia angular del retardo de la señal $-\ln(1 + \cos \theta)$

El primer término en la ecuación anterior es simplemente un corrimiento rígido. El término verdaderamente interesante es el segundo pues involucra la variable θ .

La gráfica de la dependencia angular $-\ln(1 + \cos \theta)$ se muestra en la figura 3. Se puede observar que la función diverge cuando $\theta = \pi$, es decir, cuando la señal debería atravesar el Sol para llegar a la Tierra. Sin embargo, esta divergencia no existe en realidad ya que la señal simplemente es absorbida por el Sol y nunca llega a la Tierra. El máximo retardo de la señal se produce en conjunción superior cuando la señal del pulsar pasa muy cerca del limbo del Sol. Es necesario resaltar que la misma dependencia de la figura 3 se puede observar en las curvas experimentales obtenidas por Shapiro y sus colegas además de las diversas sondas y satélites artificiales que se han usado para medir el retardo dentro del sistema solar. En particular, para contrastar estas curvas podemos citar la figura 3 de [3], la figura 1 de [4], y la figura 3 de [9].

Para demostrar que el retardo de la señal es la suma de dos términos positivos, se puede expresar la última ecuación (ecuación [30]) de la siguiente forma

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \left[\ln \left(\frac{d}{r_e} \right) - \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \right] \quad (31)$$

ya que $0 \leq (1 + \cos \theta)/2 \leq 1$, la expresión $\ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)$ es negativa. En conclusión podemos observar que el retardo $\Delta t > 0$ siempre da como resultado el que la señal sea afectada por el campo gravitacional del Sol.

4 Conclusiones

La Teoría General de la Relatividad (TGR) se resume en 14 ecuaciones: Las ecuaciones de campo de Einstein (10 ecuaciones) y las ecuaciones de las geodésicas (4

ecuaciones) [6, 7].

Utilizando las ecuaciones de campo, se puede determinar la métrica del espacio-tiempo para una distribución dada de materia o energía. La TGR y sus predicciones han sido puestas a prueba un sinnúmero de ocasiones. La tres pruebas clásicas que dieron inicio al campo de la experimentación en dicha teoría fueron el avance del perihelio del planeta Mercurio, el corrimiento al rojo gravitacional y la desviación de los rayos de luz debido al campo gravitacional del Sol. Después de una temporada de hibernación en el campo experimental debido a limitaciones tecnológicas, Shapiro propuso una cuarta prueba de la TGR que fue bautizada con el nombre de Shapiro delay. Esta predicción, en estrecha relación con la desviación de la luz, es el retardo que las ondas electromagnéticas sufren al viajar de un punto a otro debido a la presencia de un campo gravitacional. Gracias al desarrollo de la tecnología de radares fue posible medir este fenómeno dentro de nuestro sistema solar con gran éxito y con una precisión que fue mejorando con el paso de los años.

Originalmente el cálculo de éste fenómeno se realizó a primer orden en el potencial gravitacional utilizando la métrica de Schwarzschild, la adecuada para este caso, y se probó que sus resultados son más que satisfactorios para potenciales gravitacionales débiles como lo es el del Sol. En particular, se han realizado y repetido numerosos experimentos enviando señales de radar hacia planetas como Mercurio, Venus y Marte, e inclusive se ha utilizado sondas espaciales como la nave Cassini como fuentes de señales de radar. Para nuestro sistema solar, se encontró que la predicción de la TGR de este fenómeno a primer orden discrepa con los resultados experimentales en un 0.0012 % [10]. Esto demuestra que, para el sistema solar, cualquier contribución al retardo debida a términos de segundo orden es totalmente despreciable y no se necesita tomar en cuenta. Sin embargo, fuera de nuestro sistema solar y debido a que en el universo abundan fuentes de campos gravitacionales fuertes, se realizó el cálculo del retardo de señales de radar con aproximación a segundo orden en el potencial gravitacional. Dichas fuentes pueden ser estrellas supergigantes azules, agujeros negros resultado del colapso de estrellas y agujeros negros supermasivos en los que las contribuciones de los términos de segundo orden son relevantes. Se encontró que el retardo que sufre una onda electromagnética cuando los cuerpos celestes, uno de los cuales es la fuente desde la que se emite la señal y el otro es la estrella (o agujero negro), están en conjunción superior es

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4x_E x_P}{R_{\odot}^2} \right) + 1 \right] + \frac{8(GM)^2}{c^5 R_{\odot}} \left[\arctan \left(\frac{x_E}{R_{\odot}} \right) + \arctan \left(\frac{x_P}{R_{\odot}} \right) + 1 \right]$$

siendo x_E y x_P las distancias de la estrella a E y P

respectivamente. M y R_{\odot} representan la masa y el radio de la estrella, respectivamente. En la ecuación anterior se recuperó el resultado del cálculo a primer orden que es el primer término de la ecuación más el término de segundo orden en el potencial gravitacional.

Ya que sabemos que para potenciales gravitacionales débiles, como es el caso del sistema solar, la contribución de los términos de segundo orden es despreciable, se procedió a calcular la contribución de estos términos al retardo a medida que se aumenta el potencial gravitacional de la estrella tomando como ejemplo agujeros negros resultado del colapso de estrellas y agujeros negros supermasivos. Los resultados del retardo en estos casos se presentan en la Tabla 1 en el cual se evidencia que es necesario tomar en cuenta los términos de segundo orden inclusive cuando la masa del agujero negro es 10 veces la masa del Sol.

Finalmente, cuando se toma en cuenta el retardo de las señales para cualquier posición del planeta fuente y el planeta receptor, y no solo para conjunción superior, el retardo tiene una dependencia del ángulo formado entre el planeta, el Sol y la fuente, que no es evidente a partir de la ecuación (2). Para demostrar esta dependencia se analizó un caso particular en el cual la onda electromagnética proviene de un objeto distante como un pulsar de tal forma que su posición se puede aproximar como fija con respecto al Sol, mientras que la posición de la Tierra, donde se recibe la señal, varía de acuerdo a su órbita. Se encontró que esta dependencia angular está descrita por la función $-\ln(1 + \cos \theta)$ que, por cierto, está en completo acuerdo con las gráficas del retardo de la luz medido en el sistema solar para señales enviadas a Venus, Mercurio y Marte (ver referencias [3, 4, 9]).

Referencias

- [1] Shapiro, I. 1964. "Fourth Test of General Relativity." *Phys. Rev. Lett.* Vol. 13-No. 26.
- [2] Shapiro, I. 1999. "A Century of Relativity." *Rev. Mod. Phys.* Vol. 71-No. 2, March, p. S41-S53.
- [3] Shapiro, I. 1968. "Fourth Test of General Relativity: Preliminary Results." *Phys. Rev. Lett.* Vol. 20-No.22.
- [4] Shapiro, I. 1971. "Fourth Test of General Relativity: New Radar Results." *Phys. Rev. Lett.* Vol. 26-No.18.
- [5] Will, C. 1993. "Theory and Experiment in Gravitational Physics." *Cambridge University Press, Cambridge, UK.*
- [6] Marín, C. 2011. "La Expansión del Universo, Una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas, Segunda Edición." *USFQ.*
- [7] Kenyon, I. R. 1996. "General Relativity." *Oxford University Press.*
- [8] Reasenberg, R. D. et al. 1979. "Viking Relativity Experiment: Verification of Signal Retardation by Solar Gravity." *ApJ. Lett.* Vol. 234, p. L219-L221.
- [9] Krisher, T. et al. 1991. "Voyager 2 Test of Radar Time-Delay Effect." *ApJ.* Vol. 373, p. 665-670.
- [10] Bertoti, B. ; Less, L. ; Tortora , P. 2003. "A Test of General Relativity using Radio Links with the Cassini Spacecraft." *Nature*, Vol. 425.
- [11] Particle Data Group 2012. "Particle Physics Booklet." *APS.*
- [12] Ohanian, H. C. 1976. "Gravitation and Spacetime." *W. W. Norton & Company, Inc.*
- [13] Maggiore, M. 2007. "Gravitational Waves: Vol. 1: Theory and Experiments." *Oxford University Press.*