

Agujeros de gusano practicables en un background cosmológico

Carlos A. Marín^{1*}

¹ *Colegio de Ciencias e Ingeniería, Universidad San Francisco de Quito*

**Autor principal/Corresponding author, e-mail: cmarin@usfq.edu.ec*

Editado por/Edited by: Cesar Costa, PhD.

Recibido/Received: 15/11/2013. Aceptado/Accepted: 27/11/2013.

Publicado en línea/Published on Web: 09/12/2013. Impreso/Printed: 09/12/2013

Abstract

For a Morris-Thorne wormhole in a cosmological background we analyze the embedding surfaces and deduce an expression for the proper radial distance taking a conformal factor $\Omega = 1$. Further, given the existence of an exotic material (negative energy density), the conditions to have a traversable wormhole are studied taking into account a cosmological background with a time dependent conformal factor Ω . Additionally, the exoticity condition is calculated together with the energy density as measured by a traveler across the wormhole.

Keywords. Wormholes, conformal factor, general relativity, hyperspace, Einstein, exoticity.

Resumen

Para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne inmerso en un background cosmológico se analizan las superficies de inserción (embedding surfaces) y se deduce la expresión para la distancia propia radial considerando un factor conforme $\Omega = 1$. Posteriormente, dada la existencia de un material exótico (material con densidad de energía negativa), se investigan las condiciones que deben cumplirse para que un viajero en una sonda espacial pueda atravesar dicho agujero considerando un factor conforme Ω dependiente del tiempo. Adicionalmente, se calcula la condición de exotividad y se procede a hallar una expresión para la densidad de energía medida por el observador que viaja a través del mencionado agujero.

Palabras Clave. Agujeros de gusano, factor conforme, relatividad general, hiperespacio, Einstein, parámetro de aceleración.

Introducción

De acuerdo con las ecuaciones de campo de la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein, el tiempo de vida de un agujero de gusano (wormhole) es en promedio muy pequeño, por lo que nada en absoluto (persona, radiaciones, señal de cualquier clase) puede viajar a través del túnel en el hiperespacio del agujero de gusano. La única manera de mantener abierto el agujero por un tiempo mucho mayor es mediante la presencia de algún tipo de material “exótico”, a lo largo del wormhole, que empuje sus paredes gravitacionalmente, manteniéndolas separadas. Para ello, se necesita una región del espacio-tiempo con curvatura negativa, similar a la superficie de una silla de montar. Al material se le denomina “exótico”, porque como Kip Thorne demostrara en 1985 [1, 2], debe tener una densidad de energía promedio negativa, con respecto a un haz de luz viajando a través del agujero de gusano. El material “exótico” repele gravitacionalmente los rayos de luz por lo que los

haces luminosos se desenfocan.

El que la densidad de energía promedio sea negativa no implica que el material exótico tenga una energía negativa con respecto a un observador en reposo en el interior del agujero de gusano. El concepto de densidad de energía es relativo al sistema de referencia utilizado; en un sistema de referencia, la densidad puede ser positiva, y en otro, negativa.

Nadie sabe exactamente de qué puede estar hecho el material exótico. Robert Wald (página 492 de la referencia [1]) ha probado recientemente que en un espacio-tiempo curvo, bajo una amplia variedad de circunstancias, la curvatura distorsiona las fluctuaciones del vacío de carácter gravitacional convirtiéndolas en exóticas debido a que su densidad de energía promedio se hace negativa. Dichas fluctuaciones del vacío son análogas a las fluctuaciones del vacío de naturaleza electromagnética. Son fluctuaciones aleatorias en la curvatura del espacio causadas porque regiones del mismo están continuamente tomando energía de regiones adyacentes, para luego de-

volverla. Bajo circunstancias ordinarias las fluctuaciones son tan pequeñas que ningún científico experimental las ha podido detectar hasta ahora. Otra posibilidad es que el material exótico esté formado por energía oscura que, como sabemos, tiene densidad de energía negativa y es el 74 % de la energía del universo. Algunos detalles sobre las características del material exótico se describen en las referencias [1, 2].

En el año 1955 John Archibald Wheeler, combinando las leyes de la Mecánica Cuántica y de la Teoría General de la Relatividad, demostró que pequeños agujeros de gusano podrían formarse para desaparecer casi instantáneamente en la escala de longitud de Planck ($l_p = (\frac{\hbar G}{c^3})^{\frac{1}{2}} = 1,61 \times 10^{-35} \text{ metros}$). De acuerdo a su análisis, en dicha escala de longitud, las fluctuaciones del vacío son tan grandes que el espacio “hierve convirtiéndose en borbotones de espuma cuántica” [1, 3]. Esta espuma cuántica está dentro de los agujeros negros, en el espacio interestelar y, en general, en todas partes. Es en dicha espuma donde se pueden crear pequeños agujeros de gusano. Incluso, versiones estables de dichos agujeros de gusano han sido sugeridas como posibles candidatos de materia oscura.

En 1966 Robert Geroch demostró que clásicamente se puede construir un agujero de gusano mediante una “deformación y retorcimiento del espacio-tiempo suave y libre de singularidades” (capítulo 14 de la referencia [1]), es decir, un desgarrón del espacio - tiempo. Dicha construcción sólo puede hacerse si, durante la construcción del agujero, el tiempo también se retuerce.

La materia exótica de la que estarían formados los agujeros de gusano viola la Condición de Energía Nula (NEC) [4, 5]. En la actualidad, sin embargo, sabemos que ciertos campos cuánticos pueden violar dicha condición. Ejemplos de tal violación son la radiación emitida por un agujero negro (radiación Hawking) y el “Efecto Casimir”.

En el presente documento, continuamos con el análisis iniciado en los artículos “Agujeros de gusano: solución exponencial” [4], “Agujeros de gusano y potenciales efectivos” [6] y “Agujeros de gusano en un background cosmológico” [7]. En primer lugar, analizaremos las superficies de inserción (embedding surfaces) y deduciremos la expresión para la distancia propia radial para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne, inmerso en un background cosmológico. Posteriormente, analizaremos las condiciones que deben cumplirse para que un viajero en una sonda espacial pueda atravesar dicho agujero de gusano, dada la existencia de un material exótico (material con densidad de energía negativa). A un agujero de gusano de estas características se le denomina “practicable” (traversable wormhole) [1, 2]. Finalmente, analizaremos la condición de exotividad y hallaremos una expresión para la densidad de energía medida por el observador que viaja a través del agujero de gusano.

Métrica

Consideremos la métrica de Morris-Thorne para un agujero de gusano inmerso en un background cosmológico [2, 4, 7].

$$(ds)^2 = \Omega^2(t) \left[e^{2\Phi} c^2 (dt)^2 - f(r) (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2 \right] \quad (1)$$

donde s representa el elemento de arco. r , θ y φ son las coordenadas esféricas de un punto y t es el tiempo coordinado medido por un observador remoto en reposo. $\Omega(t)$ es el factor conforme, el cual es finito y definido positivo a través del dominio de t [8], $(d\Omega^*)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2$ y $f(r) = \frac{1}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}}$. En la última expresión k es un parámetro independiente del tiempo que especifica la curvatura del universo y que puede ser $k = +1$ para un universo cerrado (curvado en forma parecida a la superficie de una esfera), $k = 0$ para un universo plano y $k = -1$ en un universo abierto (curvado en sentido contrario como la superficie de una silla de montar) [9, 10]. A $b(r)$ se le denomina función de forma del agujero de gusano, y determina la forma espacial del mismo. La función $\Phi = \Phi(r)$ se denomina función de corrimiento hacia el rojo. Cuando $\Phi(r) \rightarrow 0$ y $b(r) \rightarrow 0$,

$$(ds)^2 = \Omega^2(t) \left[c^2 (dt)^2 - \frac{1}{1 - kr^2} (dr)^2 - r^2 (d\Omega^*)^2 \right] \quad (2)$$

que es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW metric) [9–11]. Cuando $\Omega(t) \rightarrow \text{constante} = 1$ y $k \rightarrow 0$, la métrica (2) se aproxima a la métrica estática de un agujero de gusano de Morris-Thorne [2, 4].

Superficies de inserción (embedding surfaces)

Para un tiempo fijo t y tomando $\theta = \pi/2$ (plano ecuatorial) además de $\Omega = 1$, la parte espacial de la métrica (1) se puede escribir:

$$(ds')^2 = - (ds)^2 = f(r) (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (3)$$

que representa un elemento de arco en el plano ecuatorial. Deseamos construir en el espacio Euclideo tridimensional, una superficie bidimensional que tenga la misma geometría que la del elemento de arco descrito por (3). Entonces, uno podría encajar la geometría del espacio curvo bidimensional en la geometría plana de un espacio Euclideo tridimensional [11]. En dicho espacio Euclideo, introduciremos coordenadas cilíndricas z, r y φ . La métrica Euclidea del espacio de inserción (embedding space) es:

$$(ds_{Euclidean})^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \quad (4)$$

En (4), nosotros suponemos que $z = z(r)$ (consideramos que la superficie insertada tiene simetría axial).

Si nosotros identificamos las coordenadas (r, φ) del espacio Euclideo con las coordenadas (r, φ) del espacio-tiempo del agujero de gusano, el elemento de arco (4) será el mismo que el descrito por la ecuación (3) a través del wormhole. Podemos entonces escribir (con $f(r) \geq 0$):

$$f(r) = \frac{1}{\left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)} = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \quad (5)$$

de donde obtenemos:

$$\left(\frac{dz}{dr}\right) = \pm \left(\frac{kr^2 + \frac{b(r)}{r}}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

La ecuación (6) describe la forma en la que la función $b(r)$ modela la geometría espacial del agujero de gusano.

Si $1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} = 0$ para algún $r = r_0$, entonces

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)\Big|_{r=r_0} = \pm\infty \quad (7)$$

Todo agujero de gusano tiene un radio mínimo $r = r_0$ para el cual la superficie insertada del espacio curvo bidimensional es vertical. Dicho radio define la garganta del agujero de gusano. Si $k = 0, b(r_0) = r_0 = b_0$ [2, 4].

Distancia propia radial

Debido a la divergencia de $\frac{dz}{dr}$ en la garganta del agujero de gusano, r no es una buena coordenada a ser usada en las inmediaciones de la garganta. Una variable más conveniente es la denominada distancia propia radial medida por un observador estático dentro del agujero de gusano.

$$(dl)^2 = f(r) (dr)^2 \quad (8)$$

de manera que

$$dl = \pm \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (9)$$

Para un espacio-tiempo plano ($k = 0$) y en el caso de un agujero de gusano de Schwarzschild $r_0 = r_s = \frac{2GM}{c^2}$

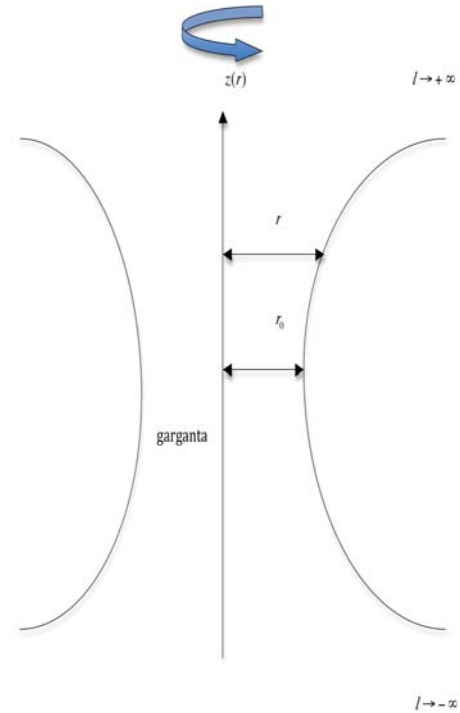


Figura 1: Diagrama de inserción para un agujero de gusano. En la garganta se cumple $r = r_0$. Para generar el agujero de gusano, se debe rotar la curva de la figura alrededor del eje z .

(donde M es la masa que genera el campo gravitacional), podemos escribir ($l = 0$ en la garganta)

$$l = \pm \int_{r_s}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pm \int_0^{r-r_s} \left(\frac{r+r_s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dr$$

con el cambio de variable $r = r_s \tan^2 \theta$ y usando $\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln (\sec \theta + \tan \theta))$ el valor de la integral es

$$l = \pm \left((r(r-r_s))^{\frac{1}{2}} + r_s \times \ln \left[\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \right) \quad (10)$$

l es positivo sobre la garganta del wormhole (upper universe), mientras que l es negativo debajo de la misma (lower universe). Para un agujero de gusano de Schwarzschild inmerso en un espacio-tiempo plano,

$\left(\frac{dz}{dr}\right)\Big|_{l \rightarrow \pm\infty} = 0$, de manera que las superficies de inserción son planas. Esto corresponde a las dos regiones asintóticamente planas ($l \rightarrow +\infty, l \rightarrow -\infty$) que son conectadas por el agujero de gusano. Ahora bien,

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (11)$$

debe estar bien definida y ser finita a través del espacio-tiempo de manera que

$$1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \geq 0 \quad (12)$$

En un espacio-tiempo plano ($k = 0$) muy lejos de la garganta del agujero de gusano en ambas direcciones radiales, el espacio debe ser asintóticamente plano, es decir, $\frac{dz}{dr}$ debe aproximarse a cero a medida que $l \rightarrow \pm\infty$. Por lo tanto $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ conforme $l \rightarrow \pm\infty$. Similarmente, si consideramos $k \neq 0$ pero muy pequeño, en la ecuación (6) para que se cumpla $(\frac{dz}{dr})_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, debemos tener que $kr^2 + \frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$. Por ejemplo, para la función de forma para un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne que evoluciona en un background cosmológico (ver referencia [7]) obtenida asumiendo que la traza del tensor energía-cantidad de movimiento es una función en variables separables de t y r y tomando $\lambda = 0$, obtenimos:

$$b(r) = C_1^* \left(\frac{r}{\alpha + 2r} \right)^5 e^{\frac{2\alpha}{r}} + 2 \left(\frac{r}{\alpha + 2r} \right)^5 \times \\ \times e^{\frac{2\alpha}{r}} \int dr e^{-\frac{2\alpha}{r}} (\alpha + 2r)^4 \times \\ \times \frac{(-\alpha kr^3 + \alpha^2 - \alpha^2 kr^2 - 3kr^4)}{r^6} \quad (13)$$

donde C_1^* y α son constantes ($\Phi = -\frac{\alpha}{r}$). En el caso particular en el que $\alpha = 0$ tenemos:

$$b(r) = b_0 + kr_0^3 - kr^3 \quad (14)$$

de manera que

$$kr^2 + \frac{b(r)}{r} = \frac{b_0}{r} + \frac{kr_0^3}{r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (15)$$

Vemos entonces que en un agujero de gusano como el de la referencia [7] también se conectan dos regiones asintóticamente planas ($l \rightarrow \infty, l \rightarrow -\infty$) por el agujero de gusano.

Viaje a través de un agujero de gusano inmerso en un background cosmológico

Supongamos que existe un material exótico (densidad de energía negativa) que permite mantener abierto un agujero de gusano por un tiempo lo suficientemente grande, y consideremos una sonda espacial viajando en dirección radial a través de dicho agujero. El agujero de gusano está inmerso en un background cosmológico. La sonda parte del reposo desde una estación espacial ubicada en la posición $l = -l_1$ y arriba a otra estación ubicada en $l = +l_2$ donde queda en reposo.

En el marco de referencia propio [7]

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} \quad (16)$$

o en forma desarrollada

$$x'^0 = \Omega e^{\Phi} x^0 \quad (16a)$$

$$x'^1 = \Omega \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} x^1 \quad (16b)$$

$$x'^2 = \Omega r x^2 \quad (16c)$$

$$x'^3 = \Omega r \sin \theta x^3 \quad (16d)$$

(Estas son las coordenadas de un conjunto de observadores que siempre permanecen en reposo en el campo gravitacional del agujero de gusano)

La velocidad radial de la sonda medida por un observador en reposo en el agujero de gusano es:

$$v(r) = \mp c \frac{dx'^1}{dx'^0} \quad (17)$$

Calculando el diferencial de las ecuaciones (16a) y (16b) y recordando que $x^0 = ct$ y $x'^0 = ct'$ además de la ecuación (9) tenemos:

$$v(r) = \mp \frac{dr}{(1 - kr^2 - \frac{b}{r})^{1/2} e^{\Phi} dt} = \frac{dl}{e^{\Phi} dt} \quad (18)$$

Por otro lado, ya que

$$dt' = \gamma d\tau_T \quad (19)$$

donde τ_T es el tiempo propio medido por el viajero a bordo de la sonda y $\gamma = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$, la ecuación (16a)

($dt' = \Omega e^{\Phi} dt$), nos permite escribir

$$\gamma v(r) = \Omega \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{\Omega dr}{(1 - kr^2 - \frac{b}{r})^{1/2} d\tau_T} \quad (20)$$

El signo negativo en la ecuación anterior lo tomaremos para el viaje debajo de la garganta del agujero de gusano, mientras que el signo positivo será para el viaje en la parte superior. En las estaciones espaciales tenemos $v = 0$, mientras que para $-l_1 < l < +l_2$ debemos tener $v > 0$. Supondremos que las estaciones espaciales están lo suficientemente alejadas de la garganta del wormhole, de manera que, los efectos gravitacionales del mismo sean muy pequeños. Esto quiere decir que la geometría del espacio en las estaciones es casi plana ($kr^2 + \frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$).

El corrimiento hacia el rojo gravitacional de las señales enviadas desde las estaciones hacia el infinito también debe ser muy pequeño por lo que

$$z = \Omega^{-1} e^{-\Phi} - 1 \approx -\Omega^{-1} \Phi + \Omega^{-1} - 1 \ll 1 \quad (21)$$

Para $\Omega = 1$ tenemos $z = -\Phi$ y por lo tanto $|\Phi| \ll 1$.

Para un agujero negro de Schwarzschild con $\Omega = 1$

$$e^{2\Phi} = \gamma^* = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \quad (22)$$

de manera que $\Phi = \frac{1}{2} \ln \gamma^*$ y por lo tanto

$$z = (\gamma^*)^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx \frac{GM}{rc^2} \quad (23)$$

Para que el viaje a través del agujero de gusano sea conveniente para los seres humanos, los tiempos empleados en viajar desde la estación ubicada en $l = -l_1$ hasta la estación ubicada en $l = +l_2$, medidos tanto por el viajero a bordo de la sonda como por los observadores en las estaciones espaciales deberían ser menores que un año [2]:

$$\Delta\tau_T = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{\Omega dl}{v\gamma} \leq 1a\tilde{n}o \quad (24)$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{ve^\Phi} \leq 1a\tilde{n}o \quad (25)$$

A continuación procederemos a calcular el valor de la aceleración de la gravedad medida por los observadores en reposo en las estaciones espaciales. El cuadrivector aceleración de un objeto en las estaciones es:

$$a'^\alpha = c \frac{\delta u'^\alpha}{\delta x'^0} = \left(\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} u'^\gamma \right) u'^\beta \quad (26)$$

donde u'^α representa el cuadrivector velocidad. Para un observador en reposo en dichas estaciones podemos escribir:

$$u'^\alpha = (u'^0, 0, 0, 0) \quad (27)$$

Donde $u'^0 = c$. Entonces, para un observador en reposo

$$a'^\alpha = \left(\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x'^0} + \Gamma_{00}^{\alpha} u'^0 \right) u'^0. \quad (28)$$

Por otro lado, usando

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha} \quad (29)$$

y las expresiones de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ dadas en la referencia [7]

podemos demostrar que

$$\Gamma_{00}^{\prime 0} = \frac{\dot{\Omega} e^{-\Phi}}{\Omega^2 c} \quad (30)$$

y

$$\Gamma_{00}^{\prime 1} = \Omega^{-1} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \Phi'(r) \quad (31)$$

$$\Gamma_{00}^{\prime 2} = \Gamma_{00}^{\prime 3} = 0 \quad (32)$$

(debido a que la transformación entre las coordenadas x^α y x'^α es lineal, entonces $\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right) = 0$). Las componentes del cuadrivector aceleración son por lo tanto:

$$a'^0 = \Gamma_{00}^{\prime 0} c^2 = \frac{\dot{\Omega} e^{-\Phi} c}{\Omega^2} \quad (33)$$

y

$$a'^1 = \Gamma_{00}^{\prime 1} c^2 = \Omega^{-1} c^2 \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} \Phi'(r) \quad (34)$$

$$a'^2 = a'^3 = 0 \quad (35)$$

La aceleración de la gravedad medida en las estaciones es:

$$g' = -(-a'^\alpha a'_\alpha)^{1/2} = -(-a'^0 a'_0 - a'^1 a'_1)^{1/2} \quad (36)$$

con $a'_0 = a'^0$ y $a'_1 = -a'^1$ podemos escribir:

$$g' = -\left(-(a'^0)^2 + (a'^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

y usando las ecuaciones (33), (34) obtenemos

$$g' = -\left(-c^2 e^{-2\Phi} \left(\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^4} \right) + \left(\frac{c^4}{\Omega^2} \right) \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) (\Phi')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

Esta aceleración debe ser menor o igual que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra:

$$|g'| \leq g_\oplus = 9,8 [m/s^2]$$

Para $\Omega = 1$ y en el límite $kr^2 + \frac{b}{r} \rightarrow 0$

$$g' = -c^2 \Phi' \quad (39)$$

de manera que

$$|g'| = |\Phi'| c^2 \leq g_\oplus = 9,8 [m/s^2] \quad (40)$$

Debido a que $|\Phi'| \ll 1$ en las estaciones, el tiempo medido por relojes colocados en las mismas es igual al tiempo coordenado t .

Para la métrica de Schwarzschild

$$b = r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (41)$$

y

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \quad (42)$$

donde M es la masa que genera el campo gravitacional. Para $\Omega = 1$, la aceleración de la gravedad (usando la ecuación (38)) será :

$$|g'| = \frac{GM}{r^2} \left(1 - kr^2 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{1/2} \times \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \quad (43)$$

Para un universo plano ($k = 0$) tenemos:

$$|g'| = \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

que es una función de la distancia radial.

Aceleración experimentada por el viajero

La transformación entre las coordenadas del wormhole (x'^{ν}) y las coordenadas del marco de referencia del viajero en la sonda (x''^{μ}) es

$$x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad (45)$$

donde

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\beta = \frac{v}{c}$. Esta transformación nos permite introducir una base de vectores para el marco de referencia del viajero:

$$\vec{e}''_{\alpha} = (\Lambda'^{-1})^{\beta}_{\alpha} \vec{e}'_{\beta} \quad (46)$$

o

$$\vec{e}''_0 = \gamma \vec{e}'_0 \mp \gamma\beta \vec{e}'_1 \quad (47)$$

$$\vec{e}''_1 = \mp\gamma\beta \vec{e}'_0 + \gamma \vec{e}'_1 \quad (48)$$

$$\vec{e}''_2 = \vec{e}'_2 \quad (49)$$

$$\vec{e}''_3 = \vec{e}'_3 \quad (50)$$

estos vectores satisfacen:

$$\vec{e}''_{\alpha} \cdot \vec{e}''_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (51)$$

por lo que constituyen una base ortonormal de vectores. El cuadrivector velocidad del viajero es

$$\vec{u} = c\vec{e}''_0 \quad (52)$$

Los cuadrivectores aceleración (\vec{a}) y velocidad (\vec{u}) del viajero son ortogonales de manera que

$$\vec{a} \cdot \vec{e}''_0 = 0 \quad (53)$$

Por otro lado, podemos escribir:

$$\vec{a} = a''^{\alpha} \vec{e}''_{\alpha}, \quad (54)$$

de manera que $a''^0 = 0$.

Si el viajero se mueve en dirección radial, su aceleración debe ser radial ($a''^2 = a''^3 = 0$), por lo que

$$\vec{a} = a''^1 \vec{e}''_1 = a\vec{e}''_1 \quad (55)$$

donde a representa la magnitud de aceleración experimentada por el viajero.

En la base $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ (ver referencia [7]) para la descripción de las bases de vectores utilizadas)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_0 &= (a^0 \vec{e}_0 + a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_0 \\ &= g_{00} a^0 = a \vec{e}''_1 \cdot \vec{e}_0 = a e^{\Phi} \Omega \vec{e}''_1 \cdot \vec{e}'_0 \\ &= \mp \gamma \beta \Omega a e^{\Phi} \end{aligned}$$

donde hemos usado $\vec{e}_0 = \Omega e^{\Phi} \vec{e}'_0$ (ver referencia [7])

De esta última relación, deducimos que

$$\begin{aligned} a^0 &= \mp \gamma \beta a \Omega e^{\Phi} g^{00} \\ &= \mp \gamma \beta a \Omega^{-1} e^{-\Phi} \end{aligned} \quad (56)$$

En la base $\{\vec{e}_{\alpha}\}$, $\vec{u} = u^{\mu} \vec{e}_{\mu}$ con $u^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3)$, mientras en la base $\{\vec{e}'_{\alpha}\}$, $\vec{u} = u'^{\mu} \vec{e}'_{\mu}$ con

$$u'^{\mu} = (\gamma c, \gamma v, 0, 0). \quad (57)$$

Usando

$$u'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} u^{\nu}, \quad (58)$$

podemos demostrar que

$$u^0 = e^{-\Phi} \gamma c \Omega^{-1} \tag{59}$$

$$u^1 = \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma v(r) \Omega^{-1} \tag{60}$$

$$u^2 = u^3 = 0 \tag{61}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} a^\alpha &= u^\alpha_{,\beta} u^\beta \\ &= \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma\right) u^\beta \end{aligned} \tag{62}$$

donde $u^\alpha = u^\alpha(t, r)$.

Para $\alpha = 0$ la ecuación (62) se escribe

$$\begin{aligned} a^0 &= \left(\left(\frac{\partial u^0}{\partial x^0}\right) + \Gamma^0_{00} u^0 + \Gamma^0_{01} u^1\right) u^0 \\ &+ \left(\left(\frac{\partial u^0}{\partial x^1}\right) + \Gamma^0_{10} u^0 + \Gamma^0_{11} u^1\right) u^1 \end{aligned} \tag{63}$$

con $x^1 = r$. Introduciendo los valores de u^0, u^1 dados en (59), (60) y de $\Gamma^0_{00}, \Gamma^0_{01}$ y Γ^0_{11} calculados en la referencia [7], obtenemos:

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{\gamma \beta c^2}{\Omega^2} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\Phi} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi) \\ &+ \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^3}\right) \gamma^2 \beta^2 c e^{-2\Phi} \end{aligned} \tag{64}$$

Esta ecuación, conjuntamente con la ecuación (56), nos permite calcular el valor de a :

$$\begin{aligned} a &= \mp \left(\frac{c^2}{\Omega} e^{-\Phi} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} (\gamma e^\Phi)\right. \\ &\left. + \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\right) \gamma \beta c e^{-\Phi}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

o en términos de la derivada con respecto a l :

$$a = \frac{e^{-\Phi} c^2}{\Omega} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \mp \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\right) \gamma \beta c e^{-\Phi} \tag{66}$$

donde hemos usado la ecuación (9).

La condición de que la aceleración del viajero con respecto al agujero de gusano no debe sobrepasar el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$|a| = \left| \frac{e^{-\Phi} c^2}{\Omega} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \mp \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}\right) \gamma \beta c e^{-\Phi} \right| \leq g_\oplus \tag{67}$$

que para $\Omega = 1$ nos da la condición:

$$\left| e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^\Phi) \right| \leq \frac{1}{0,971 \text{ años luz}}. \tag{68}$$

Aceleración de marea gravitacional

Las aceleraciones de marea $\Delta \vec{a}$ entre varias partes del cuerpo de un viajero no deben exceder el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Sea $\vec{\xi}$ el cuadvivector separación entre dos partes del cuerpo de un viajero (por ejemplo, la rodilla y la cabeza). En el marco de referencia del viajero, $\vec{\xi}$ es puramente espacial ($\xi''^0 = 0$), de manera que

$$\vec{u} \cdot \vec{\xi} = c \xi''^0 = 0 \tag{69}$$

La aceleración de marea gravitacional está dada por la ecuación de desviación de la geodésica [2, 7, 10–13], que en la base $\{\vec{e}''_\alpha\}$ es:

$$\Delta a''^{\nu} = \frac{\delta^2 \xi''^{\nu}}{\delta \tau_T^2} = -R''^{\nu}_{\beta\gamma\mu} \xi''^\gamma u''^\beta u''^\mu,$$

y ya que $\vec{\xi}$ es puramente espacial, $\Delta a''^\nu$ también lo es. Por ello, podemos escribir:

$$\Delta a''^i = \frac{\delta^2 \xi''^i}{\delta \tau_T^2} = -c^2 R''^i_{0j0} \xi''^j \tag{70}$$

Finalmente, como $R''^i_{0j0} = -R''_{i0j0}$, tenemos:

$$\Delta a''^i = c^2 R''_{i0j0} \xi''^j \tag{71}$$

donde los R''_{i0j0} se pueden calcular a partir de la relación:

$$R''_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x''^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x''^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x''^\rho} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x''^\sigma} R'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (72)$$

usando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x''^0 \mp \gamma\beta x''^1, \\ x'^1 &= \mp\gamma\beta x''^0 + \gamma x''^1 \text{ y} \\ x'^2 &= x''^2; x'^3 = x''^3 \end{aligned} \quad (73)$$

obtenidas a partir de la expresión (45) ($x'^\mu = (\Lambda'^{-1})^\mu_\nu x''^\nu$). El resultado es:

$$\begin{aligned} R''_{1010} &= \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\ddot{\Omega} - \left(\dot{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \\ &\quad - (\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2) \Omega^{-2} \\ &\quad \times \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Omega^2} \Phi'(r) \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} R''_{2020} = R''_{3030} &= \gamma^2 \left(\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\ddot{\Omega} - \left(\dot{\Omega} \right)^2 \right) \right) \\ &\quad \times e^{-2\Phi} - \frac{1}{r\Omega^2} \Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \\ &\quad \pm \frac{2\gamma^2\beta}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \\ &\quad \times \Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\Omega^2 r} \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

$$R''_{1020} = R''_{1030} = R''_{2030} = 0 \quad (76)$$

$$R''_{2010} = R''_{3010} = R''_{3020} = 0 \quad (77)$$

(esta última relación es debido a que $R''_{\mu\nu\rho\sigma} = R''_{\rho\sigma\mu\nu}$). Por lo tanto, las componentes de la aceleración son:

$$\Delta a''^1 = c^2 R''_{1010} \xi''^1 \quad (78)$$

$$\Delta a''^2 = c^2 R''_{2020} \xi''^2 \quad (79)$$

$$\Delta a''^3 = c^2 R''_{3030} \xi''^3 \quad (80)$$

donde R''_{1010} , R''_{2020} y R''_{3030} están dadas en las ecuaciones (74) y (75)

Si tomamos $|\xi''^i| \approx 2$ metros (que es aproximadamente el tamaño de un ser humano) y con la condición:

$$|\Delta a''^i| \leq g_{\oplus} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

tenemos:

$$\begin{aligned} |R''_{1010}| &= \left| \frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\ddot{\Omega} - \left(\dot{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \right. \\ &\quad - (\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2) \Omega^{-2} \\ &\quad \times \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Omega^2} \Phi'(r) \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right| \\ &\leq \frac{g_{\oplus}}{2 [m] c^2} \\ &\approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 \text{ m})^2} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} |R''_{2020}| &= |R''_{3030}| = |\gamma^2 \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\ddot{\Omega} - \left(\dot{\Omega} \right)^2 \right) e^{-2\Phi} \right. \\ &\quad - \frac{1}{r\Omega^2} \Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \\ &\quad \pm \frac{2\gamma^2\beta}{\Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \\ &\quad \times \Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left. - \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Omega^2 r} \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right| \\ &\leq \frac{g_{\oplus}}{2 [m] c^2} \\ &\approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 \text{ m})^2} \end{aligned} \quad (82)$$

(81) y (82) representan restricciones de marea gravitacional en las direcciones radial y lateral, respectivamente [2]. La ecuación (81) puede considerarse como una restricción de la función de corrimiento hacia el rojo Φ ($\Omega = 1$ y $\Phi' = 0$ satisface dicha restricción). La ecuación (82) es en cambio una restricción sobre la velocidad v con la que el viajero puede atravesar el agujero de gusano. En efecto, si $\Omega = 1$ y $\Phi' = 0$

$$|R''_{2020}| = |R''_{3030}| = \left| \frac{\gamma^2 \beta^2}{2r} \times \left[-2kr + \frac{b(r) - rb'(r)}{r^2} \right] \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 m)^2} \quad (83)$$

En un universo en expansión tomando por ejemplo $\Omega = e^{\delta t}$ con $\delta > 0$ y $t \in (-\infty, +\infty)$ tenemos

$$\frac{1}{e^{2\delta t}} \left| -(\Phi''(r) + (\Phi'(r))^2) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) + \frac{1}{2} \Phi'(r) \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 m)^2} \quad (84)$$

y también

$$\frac{\gamma^2}{e^{2\delta t}} \left| -\frac{1}{r} \Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \pm \frac{2\beta\delta}{c} \Phi' e^{-\Phi} \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - \beta^2 \times \left(\frac{1}{c^2} \delta^2 e^{-2\Phi} + \frac{1}{2r} \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 m)^2} \quad (85)$$

De estas últimas ecuaciones vemos que en un agujero de gusano inmerso en un universo en expansión, las fuerzas de marea gravitacional experimentadas por un viajero a una distancia fija r disminuyen en el transcurso del tiempo. El criterio de practicabilidad (traversability criteria) será entonces satisfecho por cualquier valor de δ si t es lo suficientemente grande. Para $\Omega = e^{\delta t}$ con $\delta < 0$ (cuando el agujero de gusano se está contrayendo) el criterio de practicabilidad restringe los valores posibles de Φ y β más y más a medida que la geometría del wormhole cambia, haciendo que el viaje eventualmente sea imposible. El comportamiento de las fuerzas de marea está entonces íntimamente relacionado con el factor conforme $\Omega(t)$. Para $\Phi = -\frac{\alpha}{r}$ (ver sección 3) las condiciones anteriores

se escriben

$$\frac{1}{e^{2\delta t}} \left| -\left(-\frac{2\alpha}{r^3} + \frac{\alpha^2}{r^4} \right) \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) + \frac{\alpha}{2r^2} \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 m)^2} \quad (86)$$

y

$$\frac{\gamma^2}{e^{2\delta t}} \left| -\frac{\alpha}{r^3} \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right) \pm \frac{2\beta\delta}{c} \left(\frac{\alpha}{r^2} \right) e^{\frac{\alpha}{r}} \left(1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - \beta^2 \times \left(\frac{1}{c^2} \delta^2 e^{\frac{2\alpha}{r}} + \frac{1}{2r} \left(2kr + \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2} \right) \right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2[m]c^2} \approx \frac{1}{(1,36 \times 10^8 m)^2} \quad (87)$$

Condición de exotocidad y densidad de energía

La condición de exotocidad para un agujero de gusano inmerso en un background cosmológico es [7]

$$\varsigma = - \left(\frac{1}{\left| \frac{3e^{-2\Phi}}{c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 + 3k + \frac{b'}{r^2} - \lambda \Omega^2 \right|} \right) \times \left(\frac{1}{c^2} e^{-2\Phi} \left[4 \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right] + \Phi' \left[\pm \frac{4}{c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(-kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) \right] + \left(2k + \frac{b'}{r^2} - \frac{b}{r^3} \right) \right) \quad (88)$$

donde λ es la constante cosmológica. Para $\Omega = 1$, $\lambda = 0$, la anterior expresión se reduce a:

$$\varsigma = - \left[\frac{1}{\left| 3k + \frac{b'}{r^2} \right| r} \right] \times \left(2r\Phi' \left(-kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) + \left(2kr + \frac{rb' - b}{r^2} \right) \right) \quad (89)$$

A partir de la ecuación (6) podemos demostrar que

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{1}{2} \left(2kr + \frac{rb' - b}{r^2} \right) \frac{1}{(kr^2 + \frac{b}{r})^2} \quad (90)$$

de manera que la exotocidad ς se puede escribir

$$\begin{aligned} \varsigma = & - \left[\frac{2}{|3k + \frac{b'}{r^2}|r} \right] \times \\ & \times \left(\Phi' \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right) - \right. \\ & \left. - \left(kr^2 + \frac{b}{r} \right)^2 \frac{d^2r}{dz^2} \right). \end{aligned} \quad (91)$$

En la garganta del wormhole se cumple: $1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}|_{r=r_0} = 0$, de manera que en la misma tenemos

$$\begin{aligned} \varsigma_0 = & \left[\frac{2}{|3k + \frac{b'(r_0)}{r_0^2}|r_0} \right] \left(\left(kr_0^2 + \frac{b(r_0)}{r_0} \right)^2 \right. \\ & \left. \times \frac{d^2r}{dz^2} \Big|_{r=r_0} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Adicionalmente, en la garganta $\frac{d^2r}{dz^2}|_{r=r_0} > 0$, de manera que $\varsigma_0 > 0$.

La función de exotocidad ς puede ser escrita como [2, 4, 7]:

$$\varsigma \equiv - \frac{T'_{\mu\nu} k'^{\mu} k'^{\nu}}{|T'_{00}|} \quad (93)$$

donde $k'^{\mu} = (1, \pm 1, 0, 0)$ representa un vector nulo radial (null vector) saliente o entrante, respectivamente. En forma desarrollada

$$\begin{aligned} \varsigma = & - \frac{(T'_{00} \pm 2T'_{01} + T'_{11})}{|T'_{00}|} \\ = & - \frac{(\rho c^2 \mp 2h - \tau)}{|\rho c^2|} \end{aligned} \quad (94)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(r, t) c^2 = & \frac{3}{k^* \Omega^2 c^2} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 e^{-2\Phi} \\ & + \frac{1}{k^* \Omega^2} \left(3k + \frac{b'}{r^2} \right) - \frac{\lambda}{k^*} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} h(r, t) = & - \frac{2}{k^* \Omega^2 c} \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) e^{-\Phi} \Phi' \\ & \times \left(1 - kr^2 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (96)$$

$$\tau(r, t) = - \frac{1}{k^* \Omega^2 c^2} \left(\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right)^2 - 2 \left(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} \right) \right) e^{-2\Phi} \quad (97)$$

$$- 2 \frac{\Phi'(r)}{k^* \Omega^2} \left(-kr - \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r} \right) \quad (98)$$

$$- \frac{1}{k^*} \left[\frac{1}{\Omega^2} \left(-k - \frac{b}{r^3} \right) + \lambda \right] \quad (99)$$

con $k^* = \frac{8\pi G}{c^4}$.

La condición $\varsigma_0 > 0$ (con $\Omega = 1$ y $\lambda = 0$) en la garganta implica

$$\rho_0 c^2 \pm 2h_0 - \tau_0 < 0. \quad (100)$$

Un observador que viaja a través del agujero de gusano con una velocidad radial v , mide una densidad de energía T''_{00} , que puede ser calculada a partir de la expresión

$$T''_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x''^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x''^{\nu}} T'_{\alpha\beta} \quad (101)$$

Usando la ecuación (73) tenemos:

$$T''_{00} = \gamma^2 T'_{00} \mp 2\gamma^2 \beta T'_{01} + \gamma^2 \beta^2 T'_{11} \quad (102)$$

que puede ser escrita en términos de $\rho(r, t)$, $h(r, t)$ y $\tau(r, t)$:

$$\begin{aligned} T''_{00} = & \gamma^2 \rho(r, t) c^2 \pm 2\gamma^2 \beta h(r, t) \\ & - \gamma^2 \beta^2 \tau(r, t) \end{aligned} \quad (103)$$

En la garganta del agujero de gusano ($r = r_0$) $\rho = \rho_0$, $h = h_0$ y $\tau = \tau_0$, de manera que

$$T''_{00} = \gamma^2 (\rho_0 c^2 \pm 2\beta h_0 - \tau_0) + \tau_0 \quad (104)$$

donde hemos usado $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$. Si la velocidad radial es próxima a la velocidad de la luz, $\gamma \gg 1$ y $\beta \approx 1$, por lo que

$$T''_{00} = \gamma^2 (\rho_0 c^2 \pm 2h_0 - \tau_0) \quad (105)$$

Usando la expresión (98) obtenemos

$$T''_{00} < 0, \quad (106)$$

es decir, que el viajero medirá una densidad de masa-energía negativa en la garganta del agujero de gusano.

Conclusiones

La Teoría General de la Relatividad se resume en 14 ecuaciones: Las ecuaciones de campo de Einstein (10 ecuaciones) y las ecuaciones de las geodésicas (4 ecuaciones) [8–10, 14].

Utilizando las ecuaciones de campo, se puede determinar la métrica del espacio-tiempo para una distribución dada de materia o energía. Partiendo de estas ecuaciones se pueden realizar toda una serie de fantásticas predicciones como el avance del perihelio del planeta Mercurio, la desviación de la luz por los campos gravitacionales, el corrimiento hacia el rojo gravitacional, la existencia de lentes gravitacionales, las ondas gravitacionales, agujeros negros, etc. Pero sin duda alguna, es la existencia de túneles en el hiperespacio que conectan dos lugares en el universo (agujeros de gusano), una de las más impactantes. En este artículo, considerando un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne inmerso

en un background cosmológico hemos analizado las superficies de inserción (embedding surfaces) y hemos deducido una expresión para la distancia propia radial tomando un factor conforme $\Omega = 1$. Posteriormente, dada la existencia de un material exótico (material con densidad de energía negativa), hemos calculado en términos de Ω y k , el valor de la aceleración de la gravedad medida por observadores en reposo en estaciones espaciales en los confines del agujero de gusano, así como la aceleración experimentada por un viajero a través de dicho agujero.

Más adelante hemos investigado las condiciones que deben cumplirse para que el viajero pueda atravesar dicho agujero de gusano. (ecuaciones (81) y (82)). Dichas condiciones no son más que restricciones de marea gravitacional en las direcciones radial y lateral, respectivamente [2]. La ecuación (81) puede considerarse como una restricción de la función de corrimiento hacia el rojo Φ ($\Omega = 1$ y $\Phi' = 0$ satisface dicha restricción). La ecuación (82) es en cambio una restricción sobre la velocidad v con la que el viajero puede atravesar el agujero de gusano. De dichas condiciones podemos deducir que en un agujero de gusano inmerso en un universo en expansión, las fuerzas de marea gravitacional experimentadas por el viajero a una distancia fija r disminuyen en el transcurso del tiempo. El criterio de practicabilidad (traversability criteria) será entonces satisfecho por cualquier valor de δ si t es lo suficientemente grande. Para $\Omega = e^{\delta t}$ con $\delta < 0$ (cuando el agujero de gusano se está contrayendo) el criterio de practicabilidad restringe los valores posibles de Φ y β más y más a medida que la geometría del wormhole cambia, haciendo que el viaje eventualmente sea imposible. El comportamiento de las fuerzas de marea está entonces íntimamente relacionado con el factor conforme $\Omega(t)$.

Empleando la condición de exotocidad hemos obtenido una expresión para la densidad de energía medida por un observador que viaja a través del agujero de gusano. Finalmente, para $\Omega = 1$, $\lambda = 0$ y $k \neq 0$, hemos demostrado que si el viajero tiene una velocidad radial próxima a la velocidad de la luz, entonces, medirá una densidad de energía negativa en la garganta del wormhole.

Referencias

- [1] Thorne, K. 1994. "Black Holes and Time Warps. Einstein's Outrageous Legacy". *W. W. Norton and Company. New York, NY.*
- [2] Morris, M.; Thorne, K. 1988. "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity". *Am. J. Phys.*, 56(5):395 – 412.
- [3] Wheeler, J. 1955. *Phys. Rev.*, 97:511.
- [4] Marín, C. 2010. "Agujeros de gusano: solución exponencial". *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 2(2):A36 – A54.
- [5] Lobo, F. 2005. "Energy conditions, Traversable wormholes and dust shells". *Gen. Rel. Grav.*, 37:2023 – 2038.
- [6] Marín, C. 2011. "Agujeros de gusano y potenciales efectivos". *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 3(1):A13 – A23.
- [7] Marín, C. 2012. "Agujeros de gusano en un Background Cosmológico". *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 4(2): A1 – A12.
- [8] Ludvigsen, M. 1999. *General Relativity A Geometric Approach, Cambridge University Press. Cambridge, UK.*
- [9] Kenyon, I. *General Relativity. Oxford University Press, Oxford, UK, 1996.*
- [10] Marín, C. 2007. "Una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas". *La Expansión del Universo. USFQ, Quito - Ecuador.*
- [11] Misner, C.; Thorne, K.; J., W. 1973. "Gravitation". *W. H. Freeman & Company, NY.*
- [12] Schutz, B. 2005. "A first course in general relativity". *Cambridge University Press, Cambridge, UK, (seventeenth printing).*
- [13] Marín, C. 2009. "Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild". *Avances en Ciencias e Ingenierías*, 1 (2):79 – 90.
- [14] Turner, M.; Kolb, E. 1990. "A first course in general relativity". *The Early Universe. Addison Wesley.*